# چهل و هشتمین المپیاد بین المللی ریاضی
# ۱۹ تا ۳۱ جولای ۲۰۰۷

IMO 2007
HANOI - VIETNAM

## ویتنام-هانوی

جمع آوری: سپیده چمن آرا

چهل وهشتمین المپیاد بین المللی ریاضی، تابستان سال گذشته در شهر هانوی کشور ویتنام برگزار شد. بنا به سنّت دیرینه ی مجله ی رشد آموزش ریاضی، در این شماره، گزارش کوتاهی از نتایج ایران در این مسابقه و سؤالات آن را به چاپ می رسانیم.

48th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
Hanoi, 19-31 July 2007

**روز اول** July 25, 2007

۱. اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ داده شده است. برای هر $i$ صحیح که $1 \le i \le n$ تعریف کنید:

$$d_i = \max\{a_j :\ 1 \le j \le i\} - \min\{a_j :\ i \le j \le n\}$$

و قرار دهید

$$d = \max\{d_i :\ 1 \le i \le n\}$$

الف) برای هر دنباله ی دیگر $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ از اعداد حقیقی ثابت کنید

$$\max\{|x_i - a_i| :\ 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2} \qquad (*)$$

ب) نشان دهید اعداد حقیقی $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ یافت می شود به طوری که نامساوی (*) به تساوی تبدیل شود.

۲. پنج نقطه ی $A,B,C,D,E$ در صفحه به گونه ای قرار دارند که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع و چهارضلعی $BCED$، محاطی است. فرض کنید خط $l$ گذرا از $A$ درون پاره خط $DC$ را در نقطه ی $F$ و خط $BC$ را در نقطه ی $G$ قطع می کند. اگر $EF=EG=EC$ ثابت کنید $l$ نیم ساز زاویه ی $D\hat{A}B$ است.

۳. در یک مسابقه ی ریاضی، بعضی شرکت کننده ها دوست هستند. دوستی همواره دوطرفه فرض می شود. یک گروه از شرکت کننده ها را محفل گوییم هر گاه دو تا از آن ها دوست باشند. (به ویژه هر گروه با کم تر از دو عضو، یک محفل است.) به تعداد افراد یک محفل، اندازه ی آن محفل می گوییم.

فرض کنید شرکت کنندگان در این مسابقه به گونه ای هستند که حداکثر اندازه ی محفل ها، زوج است. ثابت کنید شرکت کننده ها را می توان در دو اتاق جداگانه به گونه ای قرار داد که حداکثر اندازه محفل های اتاق اول برابر حداکثر اندازه محفل های اتاق دوم باشد.

**مدت**: چهار ساعت ونیم. هر سؤال **هفت** نمره دارد.

48th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

IMO 2007

Hanoi, 19-31 July 2007

**روز دوم** July 26, 2007

۴. در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، نیم‌ساز زاویه‌ی $B\hat{C}A$ ، دایره‌ی محیطی را در R، عمودمنصف BC را در P و عمودمنصف AC را در Q قطع می‌کند. اگر K وسط ضلع BC و L وسط ضلع AC باشد، ثابت کنید مثلث‌های $\overset{\Delta}{RPK}$ و $\overset{\Delta}{RQL}$ مساحت برابر دارند.

۵. فرض کنید a و b اعداد صحیح مثبت باشند. نشان دهید اگر $(4a^2-1)^2$ بر $4ab-1$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه a=b.

۶. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. مجموعه‌ی $(n+1)^3-1$ نقطه‌ی زیر را از فضای سه‌بعدی در نظر بگیرید

$$S=\{(x,y,z):\ x,y,z\in\{0,1,\dots,n\}, x+y+z>0\}$$

کم‌ترین تعداد صفحاتی را بیابید که اجتماع آن‌ها اجباراً همه‌ی نقاط S را دربر دارد ولی مبدأ را شامل نمی‌شود.

**مدت:** چهار ساعت و نیم. هر سؤال **هفت** نمره دارد.

در این مسابقه، ایران با کسب یک مدال طلا، ۳ مدال نقره و ۲ مدال برنز، در رتبه‌ی ۱۲-اُم قرار گرفت. در جدول زیر، امتیازها و رتبه‌های شرکت‌کنندگان تیم ایران را ملاحظه می‌کنید.

| ردیف | اعضای تیم | مسأله۱ | مسأله۲ | مسأله۳ | مسأله۴ | مسأله۵ | مسأله۶ | مجموع امتیازات | رتبه | رتبه (درصد) | جایزه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | سیدحسام فیروزی | ۷ | ۷ | ۲ | ۷ | ۶ | ۱ | ۳۰ | ۱۹ | ۹۶/۵۳ | مدال طلا |
| ۲ | محمدرضا تکاپویی | ۷ | ۷ | ۰ | ۷ | ۷ | ۰ | ۲۸ | ۴۰ | ۹۲/۴۹ | مدال نقره |
| ۳ | شایان داشمیز | ۳ | ۷ | ۰ | ۷ | ۷ | ۲ | ۲۶ | ۶۰ | ۸۸/۶۳ | مدال نقره |
| ۴ | سعید هادی خانلو | ۳ | ۷ | ۰ | ۷ | ۵ | ۲ | ۲۴ | ۶۸ | ۸۷/۰۹ | مدال نقره |
| ۵ | آرمان فاضلی چاقوشی | ۶ | ۱ | ۰ | ۷ | ۶ | ۰ | ۲۰ | ۱۲۳ | ۷۶/۴۹ | مدال برنز |
| ۶ | سید مهیار سفیدگران | ۷ | ۰ | ۰ | ۷ | ۱ | ۰ | ۱۵ | ۱۹۷ | ۶۲/۲۴ | مدال برنز |