جذر، لابه‌لای بازی با مربع‌ها

مصطفی صالحی
معلم ریاضی مدارس راهنمایی منطقه‌ی سلطانیه ـ استان زنجان

چکیده

مدت‌ها است که جذرگیری و آموزش جذر، یکی از دغدغه‌های معلمان ریاضی به‌شمار می‌رود. در این مقاله جذر گرفتن از اعداد، به‌صورت چیدن مربع‌ها با الگویی خاص و ساختن یک مربع بزرگ‌تر که ضلع مربع نهایی همان جذر عدد موردنظر باشد، معرفی شده است. برای اعداد بزرگ، دسته‌بندی مربع‌ها و برای اعداد بسیار کوچک، خرد کردن مربع‌ها مدنظر است.

مقدمه

اردیبهشت سال ۱۳۷۹، آخرین جلسات درس ریاضی بود. طبق روال معمول مدرسه، کتاب‌ها تمام شده و معلم‌ها مشغول دوره کردن کتاب‌ها بودند. در ساعت ریاضی، معلم مسأله‌هایی را روی تخته می‌نوشت و بچه‌ها را تصادفی صدا می‌زد تا مسأله‌ی موردنظر را حل کند. ناگهان عبارت $\sqrt{۶۳۹}$ را روی تخته نوشت و گفت تا دو رقم اعشار حساب کنید.

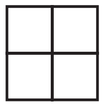
همه حیران شدند: «خدایا نکند مرا صدا کند!!!» آسمان بار امانت نتوانست کشید/ قرعه‌ی فال به نام من دیوانه زدند. بالاخره معلم گفت: «مصطفی، بیا پای تخته!» دقیقاً یک ربع ساعت رو به تخته ایستادم. فقط عرق می‌ریختم و سرخ‌تر و سرخ‌تر می‌شدم. به هرحال معلم وقتی که دید از من کاری برنمی‌آید، با عصبانیت از من خواست که بنشینم! من هم از خداخواسته، مثل برق سر جایم نشستم. هدفم از آوردن این خاطره تنها بیان مشکلی است که بین دانش‌آموزان وجود داشته و دارد؛ بله جذرگیری و آموزش جذر یکی از مشکلات آموزش ریاضی بوده و معلمان تلاش زیادی می‌کنند تا آن را به نحوی بیان کنند که هم قابل فهم برای دانش‌آموزان باشد و هم یادگیری پایدار ایجاد کند. مقاله‌ی حاضر نیز تنها الگوی ناقصی است که به ذهن نگارنده رسیده است. قطعاً شکاف‌ها و اشکال‌های بسیار زیادی دارد و به این نحو قابل ارائه در کلاس درس نیست. ولی امیدوارم کمک سایر همکاران، موجب پر کردن این شکاف‌ها و اشکال‌ها شود.

آغاز سخن

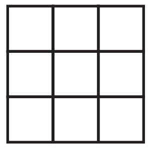
ایده‌ی استفاده شده، همان مساحت است. به این ترتیب که جذر گرفتن، پیدا کردن ضلع مربعی است که مساحت آن، عدد زیر رادیکال باشد. به‌طور مثال $۲ = \sqrt{۴}$ یعنی اگر مساحت مربعی ۴ باشد، ضلع آن ۲ خواهد بود. ولی این دردی از ما درمان نمی‌کند، باید یک قدم جلوتر

گذاشت و فراتر رفت. مساحت مربعی ۴ است یعنی چه؟ یعنی این‌که با ۴ مربع به ضلع ۱ می‌توان سطح مربعی به ضلع ۲ را پوشاند.

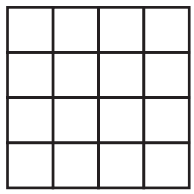
حال از این‌جا به بعد جذر گرفتن از عدد ۴ را این‌گونه مطرح می‌کنیم: فرض کنید ۴ مربع واحد دارید. قرار است با این مربع‌ها، مربع بزرگی بسازید و ضلع آن را اعلام کنید، شما قطعاً الگوی زیر را پیشنهاد خواهید کرد.



آیا برای ۹ هم می‌توانید این کار را بکنید؟ پاسخ الگوی زیر است.

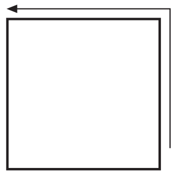


برای ۱۶ چطور؟

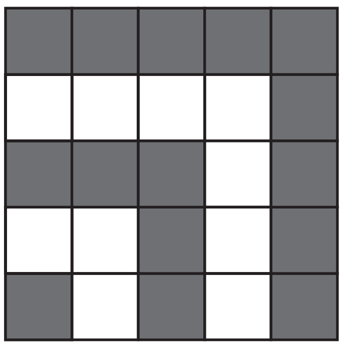


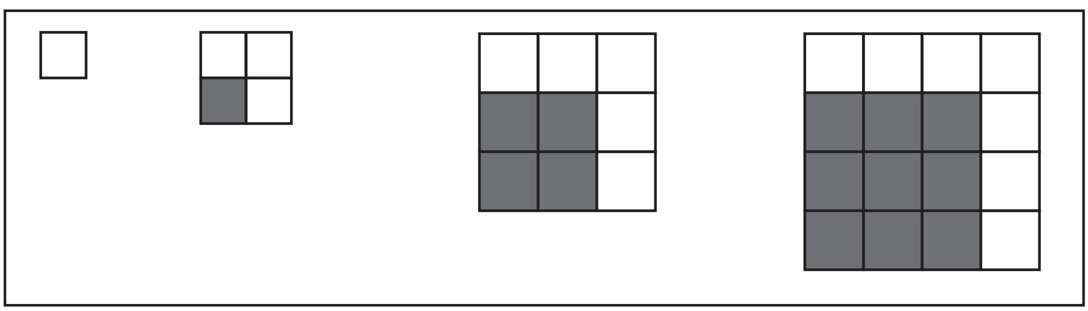
حال بیایید الگوهای به‌دست آمده را مرتب کنیم (شکل زیر):

برای این‌که الگو کامل شود، مربع واحد را نیز به ابتدای آن اضافه می‌کنیم و در هر الگو، مربع‌های الگوی قبل را با هاشور زدن مشخص می‌کنیم. به وضوح دیده می‌شود که تکامل مربع‌ها به این شکل است که ابتدا یک مربع را قرار می‌دهیم و به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است، مربع‌های جدید را به دور شکل قبل (در جهت پیکان و دورِ دو ضلع از مربع‌ها) اضافه می‌کنیم:



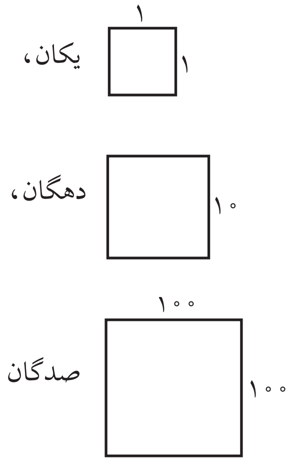
مثل این‌که تلاشمان به‌نتیجه رسید. بی‌دلیل نیست که می‌گویند: از تو حرکت، از خدا برکت. حال یک راه برای جذرگیری داریم! برای هر جذر، همان تعداد مربع آماده می‌کنیم و با الگوی فوق، مربع‌ها را می‌چینیم. وقتی که مربع‌ها تمام شد، ضلع مربع بزرگ را شمرده و به‌عنوان جذر عدد معرفی می‌کنیم. به‌طور مثال $\sqrt{۲۵}$ که طبق شکل زیر، برابر ۵ است.





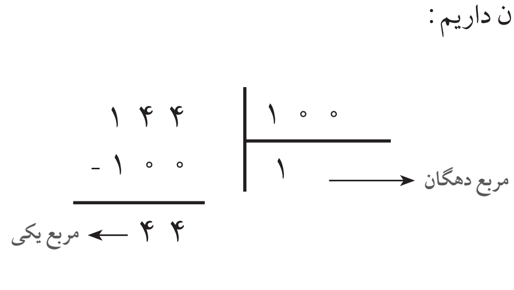
و امّا ادامه‌ی ماجرا...

این روش قطعاً کارساز ولی طاقت‌فرساست و برای اعداد بسیار بزرگ، تقریباً غیرممکن است. مهم نیست! عرق پیشانی‌مان را پاک کرده، ادامه می‌دهیم. جذرگیری از اعداد (مجذور کامل) زیر ۱۰۰ مشکلی ندارد. باید برای اعداد بزرگ‌تر از ۱۰۰ مانند ۱۴۴، ۱۶۹ و ۶۲۵ فکری کرد. آیا دوران ابتدایی را به یاد دارید؟ در آن‌جا برای بیان اعداد بزرگ‌تر چه کار می‌کردیم؟ بسته‌های ده‌تایی، صدتایی، هزارتایی، و... فکر جالبی است! بیایید ما هم دسته‌بندی کنیم ولی دسته‌هایمان را چند تا چند تا بگیریم؟ پیش از آن به یک سؤال باید جواب دهیم: یک مربع با چه چیز مشخص می‌شود؟ بله، با اندازه‌ی ضلعش. بیایید دسته‌بندی خود را روی ضلع مربع اعمال کنیم یعنی

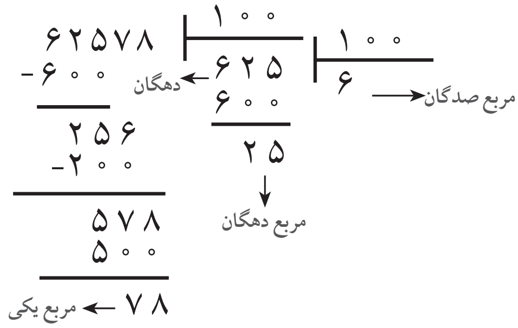


و... باشد.

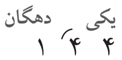
همان‌طور که می‌دانید، مساحت مربعِ دهگان، در واقع صد واحد است. یعنی باید ۱۰۰ مربع یکان زحمت بکشند و کنار هم جمع شوند تا یک مربع دهگان بسازند، لذا با ۱۴۴ مربع یکان داریم:



هم‌چنین با ۱۰۰ مربع دهگان، یک مربع صدگان ساخته می‌شود، لذا با ۶۲۵۷۸ مربع یکان داریم:

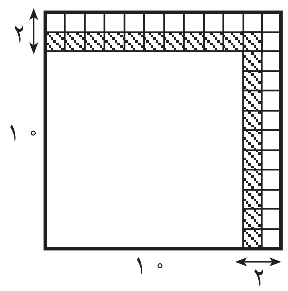


یک بار دیگر سه تقسیم بالا که برای به‌دست آوردن تعداد مربع‌های دهگان و صدگان انجام شد را مرور کنید، می‌بینید که دو رقم اول از سمت راست، نشان‌دهنده تعداد مربع یکان، دو رقم بعدی تعداد مربع دهگان و دو رقم بعدی تعداد صدگان و... است. حال برای این‌که $\sqrt{۱۴۴}$ را به‌دست آوریم، چنین عمل می‌کنیم

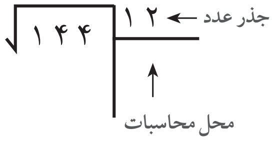


یعنی ۱ مربع دهگان داریم و ۴۴ مربع یکان و نهایتاً به جای بریدن ۱۴۴ مربع یکی و چیدن آن‌ها کنار هم، ۱ مربع دهگان و ۴۴ مربع یکان را بریده و کنار هم می‌چینیم، به شکل زیر:

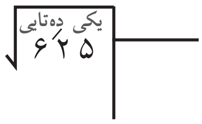
$\sqrt{۱۴۴} = ۱۲$



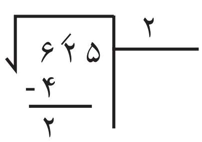
بیایید به جذرگیری‌هایمان شکل رسمی و کمی ماهیت جبری بدهیم.



با یک مثال دیگر چطورید؟

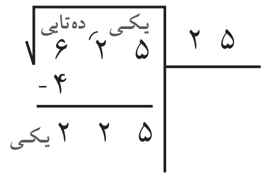


بزرگ‌ترین مربعی که با ۶ مربع دهگان می‌توانیم بسازیم چیست؟ مربع ۲×۲ از دهگان‌ها که چهار مربع از آن‌ها را در خود دارد.

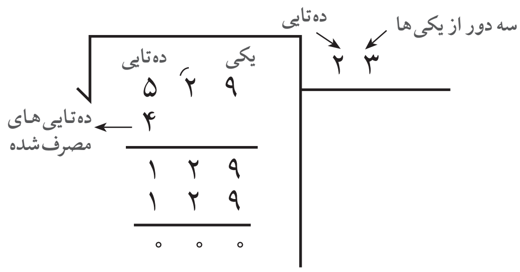


در این جذرگیری اشکالی به‌وجود آمد؟

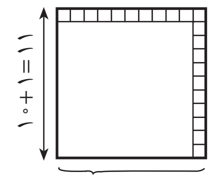
درست فهمیدید! دو بسته‌ی دهگان اضافه ماند. حال چه کار کنم؟ کاری ندارد! آن‌ها را خرد کرده به یکان‌ها تبدیل می‌کنیم؛ با ۲۵ یکی که قبلاً داشتیم می‌شود ۲۲۵ مربع یکی. با این‌ها می‌توان ۵ دور، دور مربع ۲×۲ (از دهگان‌ها)، مربع یکان چید.



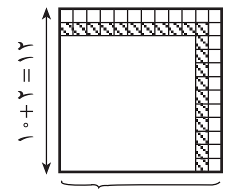
یک مثال دیگر



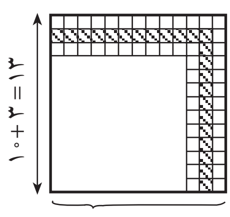
خوب است تا اینجا پیشرفت بدی نداشته‌ایم به مثال‌های زیر توجه کنید:



$\sqrt{۱۲۱}$



$\sqrt{۱۴۴}$

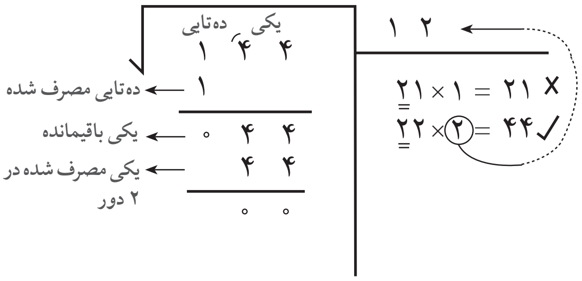


$\sqrt{۱۶۹}$

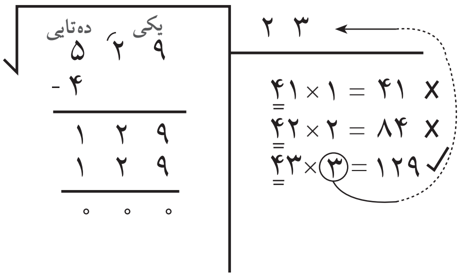
توجه خود را به تعداد مربع‌های یکی چیده شده بیش‌تر کنید.

تعداد مربع یکی = تعداد دور × تعداد دور		تعداد دور	تعداد مربع یکی	مثال مورد نظر
۲۱ = ۲ ۱ × ۱	کمی تغییر ←	۱	۲۱	۱۲۱
۴۴ = ۲ ۲ × ۲	←	۲	۴۴	۱۴۴
۶۹ = ۲ ۳ × ۳	←	۳	۶۹	۱۶۹

خیلی خوب شد! با وجود الگوی زیبایی که در شکل مشاهده می‌شود، واضح است که برای دور بعد در این مثال ۴×۲۴ و برای دور پنجم ۵×۲۵ مربع نیاز داریم.



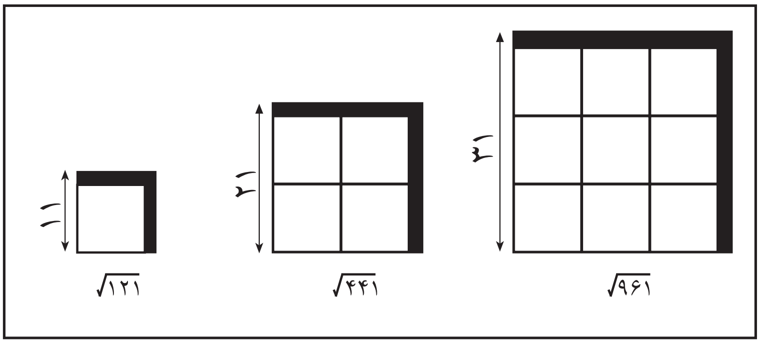
یک مثال دیگر



پس تکلیف یکان‌ها در ضرب کردن مشخص شد.

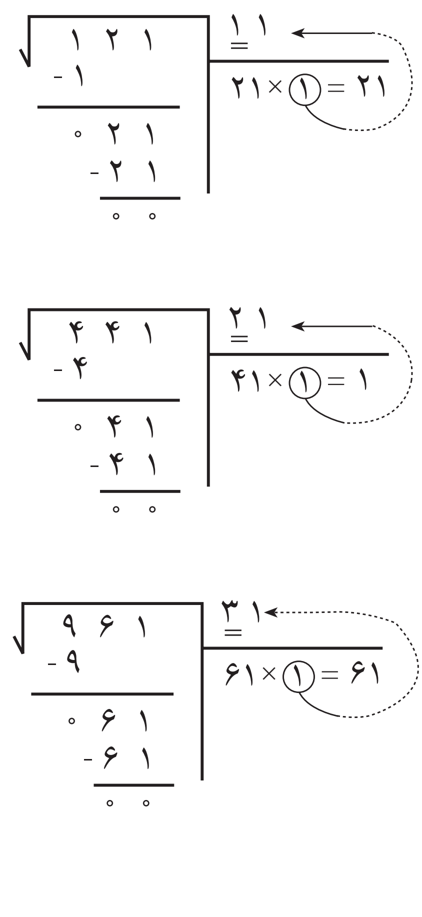
کافی است عددی که در مثال اخیر زیر آن خط کشیده شده را بدانیم و با الگوی ضرب، جذر را ادامه دهیم؛ نظرتان در مورد ۴ در مثال اخیر و عدد ۲ که در مثال قبلی استفاده شده بود چیست؟

بیایید چند مثال را بررسی کنیم: ۱۲۱، ۴۴۱، ۹۶۱ که دارای شکل‌هایی مانند شکل‌های صفحه‌ی بعد هستند:

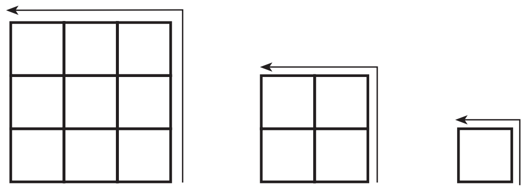


تعداد مربع یکی چیده شده در آن‌ها به ترتیب با ۲۱ ، ۴۱ ، ۶۱ برابر است. تکلیف ۱ در ۲۱ ، ۴۱ ، ۶۱ مشخص است (تعداد دور) ولی ۲ در ۲۱ و ۴ در ۴۱ و ۶ در ۶۱ از کجا آمده‌اند؟

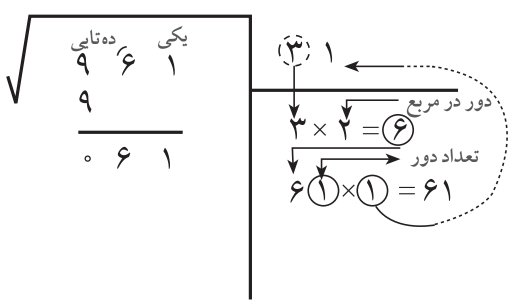
یافتن جذر این اعداد هم به صورت زیر است :



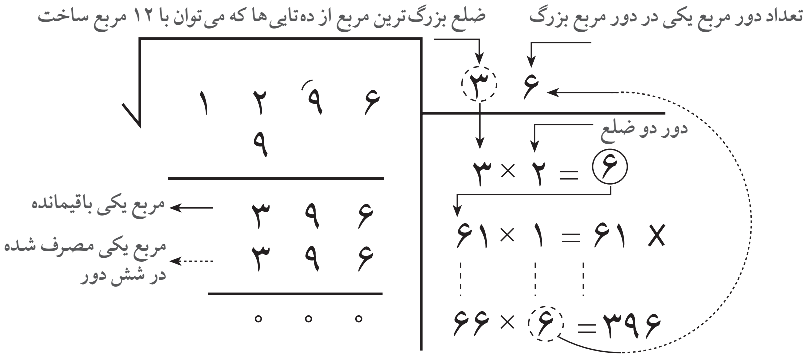
می‌دانیم اعدادی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است مربع‌های ده‌تایی‌اند (مربع‌های یک مرحله قبل). اگر آن‌ها را در ۲ ضرب کنیم، داریم ۱×۲ ، ۲×۲ ، ۳×۲ که خواهند شد ۲ ، ۴ ، ۶ . چه جالب! اینها همان اعداد موجود در مثال‌ها هستند که نمی‌دانستیم از کجا آمده‌اند؟ ولی چرا باید در ۲ ضرب شود؟ حالا نمی‌شود در ۳ یا مثلاً در ۴ ضرب کرد؟ اگر گفتید! کمی فکر کنید. ما سه مربع داریم



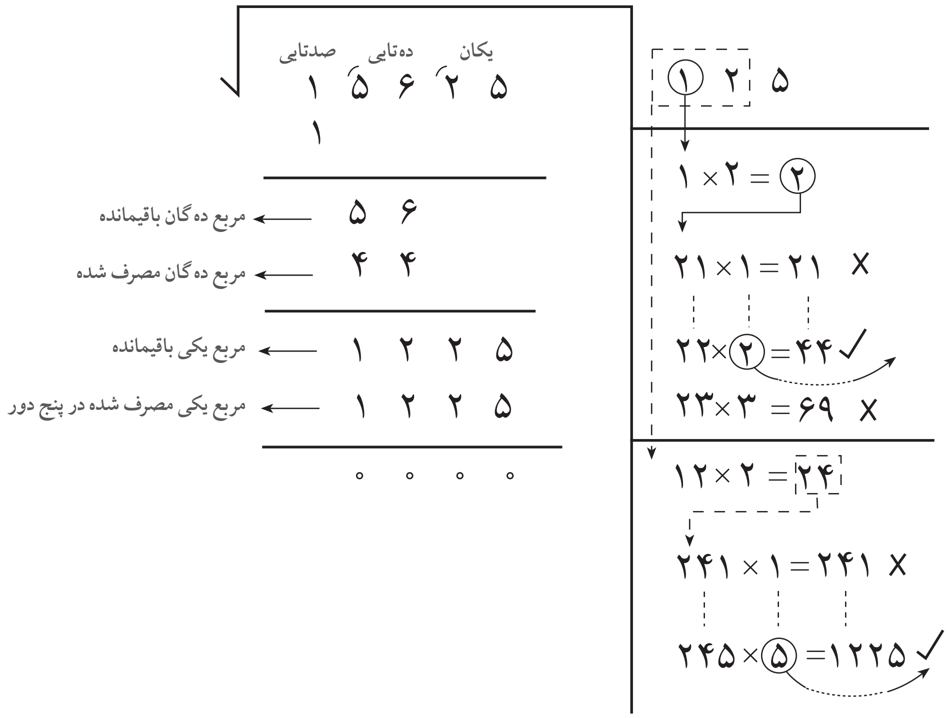
که دور ۲ ضلع آن مربع‌های یکی را می‌چینیم. آری دور ۲ ضلع می‌چینیم؛ چون دور ۲ ضلع می‌چینیم ضلع مربع بزرگ در ۲ ضرب می‌شود. الگوهایمان در حال تکمیل شدن است. یک مثال دیگر :



با یک مثال دیگر چطورید؟!



و یکی دیگر :



الگوی به‌دست آمده، هنوز ناقص است، امیدوارم بتوانم الگوی کامل‌تری را در آینده ارایه کنم، طوری که بتوان به سؤالاتی از قبیل: آیا می‌شود به غیر از مربع از شکل منتظم دیگری استفاده کرد؟ یا آیا اصلاً می‌شود از شکل غیرمنتظم دیگری استفاده کرد؟ پاسخ داد.

پاسخ این پرسش آری است حتی شما می‌توانید توسط تصویر ۴×۳ خودتان جذرگیری کنید! آیا می‌شود به جای چیدن مربع‌ها دور دو ضلع مربع، این کار را روی چهار ضلع انجام داد؟ باز هم پاسخ مثبت است!

آیا می‌توان الگو را به سه بعد تعمیم داد؟ مجدداً پاسخ مثبت است!

زیرنویس

به رسم ادب، مراتب سپاس و قدردانی خود را محضر استاد محترم، جناب آقای کمال محمدیان ابراز می‌کنم که هم طرح مسأله از جانب ایشان صورت گرفت و هم در مراحل مختلف کار، یاری‌گر نگارنده بوده‌اند.