چکیده

هدف من در این مقاله، این است که نشان دهم چگونه می‌توان از ساخت‌های نظری، برای تدریس آگاهانه‌تر ریاضی استفاده کرد و چگونه همین ساخت‌ها توسط افرادی که به کسانی که می‌خواهند معلم شوند درس می‌دهند، استفاده می‌شود. پیشنهادهای من براساس ساختارهایی است که طی دهه‌ی ۸۰ در دانشگاه آزاد[۱] لندن توسعه یافت و از آن زمان مورد استفاده قرار گرفت، به‌همراه بصیرتی که در تقابل با برخی از محققان و سنت‌های تحقیقی، تحقق یافت.

استفاده از ساخت‌های نظری برای تدریس آگاهانه

مقاله‌ی ارایه شده در نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*
شهریور ۱۳۸۶

جان میسون، دانشگاه آزاد لندن
ترجمه: سپیده چمن‌آرا، معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

ایده‌های اصلی

بهتر است میان **تکالیف**[۲]، **فعالیت**[۳]، **تجربه**[۴] و **بازتاب**[۵]، تمایز قائل شویم. تکالیف، همان چیزهایی هستند که نویسنده‌ها در کتاب‌های درسی قرار می‌دهند، معلم‌ها به دانش‌آموزان می‌دهند تا فعالیت آن‌ها را شکل بدهند. به هرحال، آن‌چه که دانش‌آموزان می‌پندارند تکلیف است، اغلب آن چیزی نیست که معلم قصد دارد، و این نیز ممکن است آن چیزی نباشد که نویسنده‌ی کتاب درنظر داشته است! **فعالیت** آن چیزی است که دانش‌آموزان واقعاً انجام می‌دهند، و با تفسیر آن‌ها از اهداف تکلیف، هدایت شده است. تمایز میان تکلیف و فعالیت، به وگودسکی برمی‌گردد (کریستیانسن و والتر، ۱۹۸۶ را ببینید)، لیکن بسیاری از افراد نیز زمانی که رفتار یادگیرندگان در کلاس‌های درس را به‌دقت مشاهده می‌کنند، این تمایز را قائل می‌شوند.

مثال: زمانی که به دانش‌آموزان، چند مثال حل شده نشان می‌دهید و سپس از آن‌ها می‌خواهید به سؤال‌های مشابهی پاسخ دهند، از مثال‌های حل شده به‌عنوان یک شابلون (کلیشه) استفاده می‌کنند و تلاش می‌کنند ببینند چگونه می‌توانند اعداد (یا چیزهای دیگر) را تغییر دهند تا با تمرینی که به ایشان داده شده، جور شود. دانش‌آموزانی که فقط کلیشه‌برداری می‌کنند، ممکن است رفتار خود را تربیت کنند، ولیکن بدون سایر اَشکالِ عمل و بازتاب، بعید است که آگاهی خود از ساختارهای نهفتهَ در مسأله را آموزش ببینند. نتیجه این است که احتمالاً ایشان، برای پاسخ‌گویی به تمرین‌هایی که به نوعی متفاوت هستند، انعطاف کافی نخواهند داشت. راه خوبی برای آزمودن این امر، آن است که یک تمرین استاندارد را بگیرید و با معکوس کردن یا undo کردن آن، تمرین جدیدی بسازید که در آن به دانش‌آموز، پاسخ را داده باشید و از وی خواسته باشید بعضی از داده‌ها یا همه‌ی داده‌هایی را که منجر به آن پاسخ می‌شوند، بیابند. به‌عنوان مثال، «معادله‌ی $3x+7=19$ را حل کنید» را می‌توان به «معادله‌ای بسازید که $x=4$ جوابِ معادله باشد و در آن، اعداد ۷ و ۱۹ به‌کار رفته باشد» تبدیل کرد. البته پاسخ‌های ممکنِ بسیاری وجود دارند، لیکن چنین تمرینی، به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد که خلاق باشند.

فعالیت یعنی فقط فرد، کاری انجام دهد. فعالیت، یادگیری نیست. هدف فعالیت این است که یادگیرندگان، تحت رهبری، اعمالی را انجام دهند که بتوانند به زودی این اعمال را برای خودشان شکل بدهند. این، همان چیزی است که لِو وگودسکی، از آن با نام **دامنه‌ی تقریبی رشد**[۶] یاد کرده است (والسینر، ۱۹۸۸). از لحاظ پداگوژیکی، فعالیت کارآمد، یادگیرنده را به چالش می‌اندازد تا اعمال آشنا را به روش‌های جدیدی به‌کار بندد یا اعمال جدیدی برای حل تکالیف جدید، توسعه دهد. می‌تواند طی یک فعالیت، تدریس نیز صورت گیرد، چرا که طی تعامل‌هایی که یادگیرندگان در آن فعالیت درگیر آن هستند می‌توان توصیه‌ها و راهنمایی‌های مؤثری به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. ولی موفقیت تجارب منجر به تجربه‌ی آن موفقیت نخواهد بود: نیازمند چیز بیش‌تری هستیم که تجربه را به یادگیری تبدیل کنیم. به‌نظر می‌رسد یکی از دلایلی که ما از تجارب چیزی یاد نمی‌گیریم، این است که اغلب نمی‌توان از تجربه‌ی صرف چیزی فرا گرفت. عمل دیگری نیز لازم است، که اغلب آن را **بازتاب** می‌نامیم، و طی آن، آن‌چه که مورد تجربه قرار گرفته است، با عمل یادگیرندگان تلفیق می‌شود تا عملکرد آینده‌ی آن‌ها را آگاهانه سازد.

معلمان از تمایز میان تکالیف، فعالیت، تجربه و بازتاب با استفاده از آن‌ها در طراحی تدریس و هدایت کلاس‌های درس خود، منفعت می‌برند. آموزشگران معلمان نیز با ساخت تکالیفی برای معلمان احتمالی آینده، از این تمایز سود می‌برند؛ تکالیفی که احتمالاً فعالیت‌هایی را برمی‌انگیزانند که طی آن افراد، به‌عنوان معلم، خودْ اهمیت این تمایز را تجربه می‌کنند.

روش‌های من

این ایده‌های اصلی و مرکزی، دارای استلزاماتی برای روش‌های کاری هستند. من از تکالیف برای تولید فعالیت‌هایی استفاده می‌کنم که ضمن آن‌ها، افراد تجاربی داشته باشند که از آن‌ها چیزی یاد بگیرند. در سخنرانی کنفرانس، از تکالیفی استفاده خواهم کرد که افراد را وادار به تجربه‌ی استفاده از توانایی‌های طبیعی مختلفشان، ارزش ساخت اشیای ریاضی برای خودشان و انتخاب‌های مناسب برای خودشان به‌عنوان یادگیرنده کند و تأثیر ساختارهای روان‌شناسانه را در طراحی و اجرای آگاهانه‌تر تدریس ببینند. حدس می‌زنم آن‌چه که افراد، ضمن سخنرانی کسب خواهند کرد، بیش‌تر از آن چیزی باشد که هنگام اجرای تکالیف، برایشان رُخ می‌دهد: شیوه‌هایی که توسط آن از توانایی‌های طبیعی ریاضی خویش استفاده می‌کنند، روشی که به سوی تکلیف و فعالیت کشیده می‌شوند، و روشی که در آن می‌توان از ساختارها برای توجیه و طراحی تکالیف مشابه برای یادگیرندگان استفاده کرد.

تکالیف

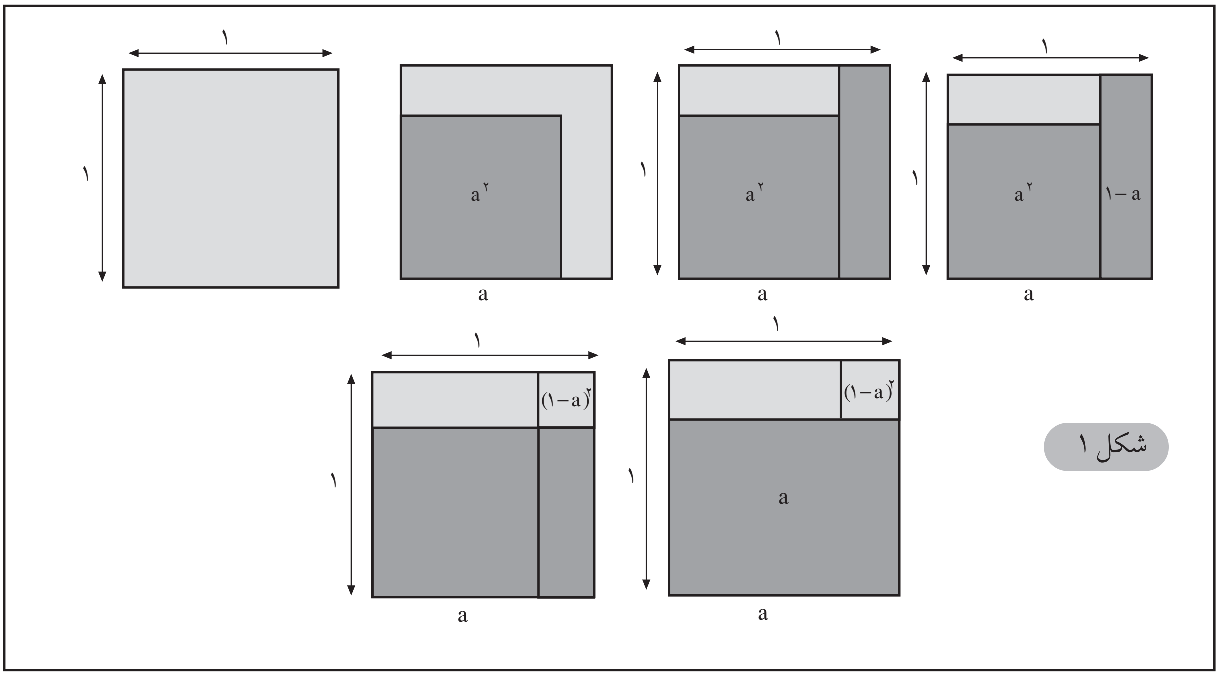
تکالیفی که در این مقاله انتخاب شده‌اند، تنها برای نمایش توانایی‌های طبیعی حس ریاضی و کاربرد ساختارهای روانی در طراحی و کاربرد آن‌ها نیستند، بلکه، تکالیف نوعی را نیز نشان می‌دهند. هریک از تکالیف نوعی را می‌توانَ به طرز کارآمدی در مدارس ابتدایی، راهنمایی، متوسطه، و حتی دانشگاه، مورد استفاده قرار داد.

● **تکلیف ۱: یک مجموع**

دو عدد دارم که مجموعشان یک است. کدام مقدار بزرگ‌تر است: مجموع مجذور عدد بزرگ‌تر با عدد کوچک‌تر یا مجموع عدد بزرگ‌تر با مجذور عدد کوچک‌تر؟ نخست حدس بزنید، سپس حدس خود را بررسی کنید!

قصدم این است که افراد، پیش از انجام محاسبات، حدس‌هایی بزنند: تنها زمانی از اشتباهات خود می‌آموزید که اول، دچار آن اشتباه شده باشید؛ در صورتی که خود را به این متعهد کنید که پیش از آزمودن مسأله، درباره‌ی آن حدس مناسبی بزنید، شهود خود را اصلاح خواهید کرد. البته اکثر مردم مستقیماً سراغ جبر می‌روند. لیکن افراد محتاط، سعی می‌کنند یکی ـ دو مثال خاص حل کنند. **حل مثال خاص**[۷]، یک راه طبیعی برای زمانی است که با یک موضوع مجرد یا موضوع کلّی مواجه می‌شویم. هدف از مثال خاص، کسب بصیرت درباره‌ی آن چیزی است که[در حالت کلی] اتفاق می‌افتد. اکنون نمایش تصویری از آن‌چه اتفاق می‌افتد را نمایش می‌دهم تا ببینید که پاسخ هر دو عبارت، یکی است. (شکل ۱)

با نمایش متوالی این تصاویر، امیدوارم افراد را تحریک کنم که در هر مرحله، موضوع برایشان روشن شود و بتوانند حدس



شکل ۱

بزنند که در تصویر بعدی چه اتفاقی می‌افتد. در کلاس درس، یادگیرندگانی که حضور دارند، حدس‌هایی می‌زنند و آن‌ها را بررسی می‌کنند. آن‌ها فعالانه درگیر هستند. یادگیرندگانی که پشت جزوه‌نویسی مخفی هستند یا در انتظار آن‌چه بعداً اتفاق می‌افتد می‌مانند، نسبتاً منفعل هستند. آن‌ها از خود، کار نمی‌کشند. آن‌ها، ریاضی‌وار فکر نمی‌کنند. یک کم بررسی و مفهوم‌سازی لازم است، چرا که همان‌طور که متوجه شده‌اید، شما دارید یک مجذور (مساحت) را به یک عدد (طول) اضافه می‌کنید. لیکن همان طور که در یونان باستان پی برده بودند، می‌توانیم از طول واحد برای تبدیل یک کمیت طولی به یک کمیت سطحی، استفاده کنیم. از آن‌جا که مساحت‌های تیره شده با هم برابرند، هر دو عبارت، مقادیر یکسان دارند... حداقل برای زمانی که هر دو عدد موردنظر، مثبت باشند. آیا می‌توان با یک نمودار یا تصویر نشان داد که این عبارت‌ها به ازای اعداد منفی نیز با هم برابرند؟

● **تکلیف ۲: اعداد اعشاری**

یک عدد اعشاری بنویسید که بین ۲ و ۳ باشد.

اکنون یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ نباشد.

حال یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ نباشد ولی رقم ۷ داشته باشد.

بالاخره، یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ به کار نرفته باشد، ولی رقم ۷ داشته باشد و تا حد امکان به $\frac{۵}{۲}$ نزدیک باشد.

ساختار تکلیفی فوق، با چیزی شروع می‌شود که فکر می‌کنیم اغلب یادگیرندگان آن را انتخاب خواهند کرد [یعنی عدد ۲/۵]، سپس تحریم آن تا آنان را وادار کنیم خلاقانه‌تر فکر کنند تا نسبت به سایر اعداد ممکن نیز آگاهی یابند. پس از آن محدودیت‌های بیش‌تری گذاشتیم. اغلب مردم، پیش از این‌که آخرین شرط را بگذاریم، به عدد ۲/۴۷ می‌رسند. پس از آن، تعدادی از آن‌ها به سمت اعدادی مانند ۲/۴۹۹۹۹۷ می‌روند و دیگران اعدادی مانند ۲/۴۷۹۹۹۹ را انتخاب می‌کنند. با تلفیق این دو ایده، می‌توان اعدادی مانند ۲/۴۹۹۹۹۷۹۹۹۹ را به‌دست آورد [که از هر دوی آن‌ها، به $\frac{۵}{۲}$ یا ۲/۵، نزدیک‌تر است]. دو بلوک ۹ها را می‌توان هر قدر که دوست داریم، بلند اختیار کنیم، و حتی می‌توان بلوک دوم را تا بی‌نهایت ادامه داد.

با توصیف این که کدام یک از اعداد، به $\frac{۵}{۲}$ نزدیک‌تر هستند، و با درنظر گرفتن دنباله‌هایی از اعداد که بلوک اول یا بلوک دومِ ۹های آن، طولانی‌تر و طولانی‌تر می‌شوند، به مفهوم حد می‌رسیم؛ در حالی که تنها از تسلط رایج یادگیرندگان بر اعداد اعشاری استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه، این حقیقت که آن‌ها را به ساخت اعدادی برای خودشان دعوت می‌کنیم، بر علاقه و انگیزه‌ی آن‌ها می‌افزاید.

با بررسی ایده‌های یکدیگر و استفاده از آن‌ها در ساختارهای خودشان، تجربه‌های آن‌ها را غنا می‌بخشیم. اگر معلم توجه آن‌ها را به استراتژی‌هایی که کار می‌کنند و نکاتی که در بحث‌های کلاسی وجود دارند، جلب کند، به احتمال زیاد یادگیرندگان در آینده نیز از ایده‌های مشابه، استفاده خواهند کرد. یک بار انجام تکلیفی مشابه این تکلیف، برای یادگیرندگان مفید است؛ و انجام چندین باره‌ی آن، آنان را قادر می‌سازد تجارب قبلی خود را بسازند و ایده‌ها را با تفکر و عمل شخصی خود، تلفیق کنند. یک جنبه‌ی مهم این تکلیف و سایر تکالیف، این است که یادگیرندگان با اشیای آشنا (ارقام)، دست‌ورزی می‌کنند تا اعداد را بسازند و حسی از ساختار اعداد به‌دست آورند (در این نمونه، این که با شرایط داده شده، چگونه اعداد با طولانی‌تر شدن بلوک ۹ها، بزرگ می‌شوند). اگر طی بحث‌های کلاسی، یادگیرندگان بتوانند استدلال خود درباره‌ی دنباله‌ی

۲/۴۷ و ۲/۴۹۷ و ۲/۴۹۹۷ و ۲/۴۹۹۹۷ و ...

را بیان کنند و این که حد آن چیست را دریابند، آن‌گاه دامنه‌ی اعداد اعشاری آشنای خود را بسط داده‌اند تا حسی از اعداد اعشاری به اندازه‌ی کافی بلند و نامتناهی به‌دست آورند.

● تکلیف ۳: تفاضلِ ۲

یک جفت عدد بنویسید که تفاضل آن‌ها، ۲ باشد.
یک جفت عدد دیگر بنویسید (که باز هم تفاضلشان ۲ باشد.)
یک جفت دیگر هم بنویسید.

من و همسرم، آن واتسون[۸]، کشف کردیم که در سومین درخواست، اغلب افراد شروع می‌کنند به خلاق شدن یا باهوش شدن. در عین حال که آن‌ها، از این که شما قصد داشته باشید از آن‌ها بخواهید کار بغرنجی با اعداد خود انجام دهند نمی‌ترسند، شروع می‌کنند به ماجراجویی. اگر افراد جفت اعداد خود را به صورت عادی نمایش دهند، دیگران ایده‌هایی از آن‌ها برمی‌دارند که به ذهن خود آن‌ها هم بروز نکرده است: به‌عنوان مثال، بعضی فکر می‌کنند از اعداد کسری استفاده کنند، ولی دیگران، نه؛ بعضی فکر می‌کنند از اعداد منفی استفاده کنند، اما دیگران چنین نمی‌کنند؛ برخی به اعداد اعشاری می‌اندیشند، لیکن بقیه نه؛ و عده‌ای به ریشه‌ها یا اعداد مختلط فکر می‌کنند. در مواجهه با امکانی که شما به آن فکر نکرده بودید، برای دفعات بعدی که به تکالیف مشابه برخورد کنید، آزادی بیش‌تری برای انتخاب به‌دست می‌آورید (واتسون و میسون، ۲۰۰۵).

ما به افرادی برخورد کردیم که به اعدادی مانند ۱۱ و ۱ (چه به‌عنوان اعدادی در مبنای دو، چه به عنوان اعداد روی یک ساعت) نیز درست مانند جفت‌های سنّتی ۹۹۹۹ و ۱۰۰۰۱ فکر کرده بودند: اعدادی که بسیاری از یادگیرندگان برایشان سخت بود که متوجه بشوند این دو، تفاضل ۲ دارند.

زمانی که از یادگیرندگان می‌خواهیم که جفت عددی بسازند که تفاضلشان ۲ باشد و دیدن این که تفاضل آن‌ها ۲ است، ساده نباشد؛ افراد، سراغ اعدادی مثل $\sqrt[۳]{۱۲۵}$ و $\sqrt{۴۹}$ یا $-۱\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۲}{۷}$ یا $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}+۱$ و $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}-۱$ و مانند آن‌ها می‌روند. خلاقیتی بزرگ عرضه می‌شود. باز هم یادگیرندگان را به‌دست‌ورزی با اشیای آشنا (اعداد) دعوت کردیم تا اعداد پیچیده‌تری با آن‌ها بسازند که یک ویژگی خاص یا محدودیتی دارند.

● تکلیف ۴: تشخیص ویژگی‌ها[۹]

چه اعدادی را می‌توان به صورت ۲ واحد بیش‌تر از مجموع چهار عدد صحیح متوالی، نمایش داد؟
چه اعدادی را می‌توان به صورت ۱ واحد بیش‌تر از حاصل ضرب چهار عدد متوالی، نمایش داد؟

سؤال اول چنان ساده به نظر می‌رسد که آن‌ها که در جبر، اعتماد به نفس دارند، تصمیم می‌گیرند با دست‌ورزی با حروف مرسومی هم‌چون x یا n، روی مسأله کار کنند. به‌وضوح،

کشف این‌که هر مضرب ۴ که از ۸ بزرگ‌تر باشد، در شرایط این سؤال صدق می‌کند، کار سختی نیست (خود را به اعداد صحیح محدود کردیم). لیکن رویکردی مشابه برای مسأله‌ی دوم، ما را با محاسبات جبری مشکلی مواجه می‌سازد. تا زمانی که درباره‌ی آن‌چه اتفاق می‌افتد حدس نزنید، برایتان مشکل خواهد بود که در عبارت‌های جبری متناظر با آن، هیچ ساختاری را ببینید. اما اگر برای دیدن آن‌چه اتفاق می‌افتد، مثال خاصی بزنید، آماده می‌شوید حدسی بزنید که درستی آن با جبر، ثابت می‌شود. قدرت مثال‌های خاص و شهودی که از بررسی آن مثال خاص به‌منظور تعمیم آن استفاده می‌شود، در اختیار همه‌ی یادگیرندگانی است که می‌توانند حرف بزنند؛ چرا که زبان، همه‌اش برای چک و چانه زدن میان خاص و عام است.

من دو تا حدس دارم:

حدس ۱: درسی که به یادگیرندگان هیچ فرصتی نمی‌دهد که فرآیند تعمیم را تجربه کنند، یک درس ریاضی نیست.

حدس ۲: هر صفحه از هر کتاب درسی ریاضی، حداقل یک تعمیم دارد؛ این تعمیم ممکن است صریح یا ضمنی باشد.

به عنوان یک معلم، نه تنها ضروری است که بتوانیم تعمیم‌های ضمنی را تشخیص دهیم، بلکه باید بتوانیم یادگیرندگان را برای استفاده از توانایی‌شان در تعمیم موضوعات هدایت کنیم تا فرآیند تعمیم را تجربه کنند. مجموعه‌ای از مثال‌های حل شده، کلیشه‌ای به یادگیرندگان می‌دهد که آن را تقلید کنند؛ و این یک تعمیم ضمنی است. مجموعه‌ای از مثال‌ها درباره‌ی مفاهیم ریاضی مانند زاویه یا مثلث یا اعداد اول، دعوت به تعمیم است، به دیدن امری کلی در مثالی خاص.

اگر یادگیرندگان را به استفاده از توانایی‌شان ترغیب نکنیم، در این صورت به مشارکت در ریاضی و به ریاضی‌وار فکر کردن تشویق نمی‌شوند، و بنابراین باید به حافظه‌شان تکیه کنند و به تشخیص تطابق میان سؤال‌های امتحانی و تمرین‌هایی که انجام می‌دهند!

● **تکلیف ۵: ترسیم نمودار**

ـ نمودارهای یک جفت خط راست را رسم کنید که عرض از مبدأ آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که طول از مبدأهای آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که شیب‌های آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ حال، نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که هم طول از مبدأهای آن‌ها و هم عرض از مبدأهای آن‌ها و هم شیب‌های آن‌ها، ۲ واحد با هم اختلاف داشته باشند!

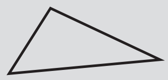
افرادی که برای هر یک از سه قسمت اول تکلیف، تنها یک مثال ارایه کرده‌اند، برای حل کردن قسمت آخر، در موقعیت ضعیفی هستند. در حالی که کسانی که در هر یک از سه قسمت اول، به همه‌ی جفت‌های خطوط ممکن فکر کرده‌اند، برای مواجه شدن با قسمت آخر، مجهزتر هستند. بهتر است مثال‌هایی را که در هر لحظه به ذهن یادگیرنده خطور می‌کند، **فضای مثال‌های در دسترس**[10] یادگیرنده بنامیم. صفت **در دسترس** به این معنی است که مثال‌های دیگری هستند که زیر پوششی قرار دارند که ممکن است هنوز به ذهن نیامده باشد، جزئی از **فضای مثال‌های** غنی‌تر. زمانی که یادگیرندگان فضای مثال محدود یا باریکی داشته باشند، برای مواجه شدن با قضایا یا حقایقی که معلم مطرح می‌کند، در موقعیت ضعیفی قرار دارند. تکالیف ساختنی، هم برای غنا بخشیدن به فضای مثال‌های یادگیرنده مفید هستند، هم برای برملا کردن گستردگی و پیچیدگی فضای مثال‌های در دسترس وی.

هم‌چنین این تکلیف نشان می‌دهد که تکلیفی با مضمون «تفاضل ۲»، می‌تواند نسخه‌های متفاوتی داشته باشد که مورد استفاده‌ی یادگیرندگان در هر سن و با هر سطحی از پختگی قرار گیرد. البته به جای **تفاضل** می‌توان از عملگر یا رابطه‌ی دیگری استفاده کرد، و **۲** نیز می‌تواند به کلی چیز دیگری باشد، و اشیاء می‌توانند اعداد، توابع، شکل‌های هندسی و نظایر آن باشند.

قسمت چهارم این تکلیف قصد دارد قوه‌ی تخیّل را تمرین دهد، و برای این منظور، به‌جای پیشنهاد استفاده از جبر، از کلمه‌ی «رسم کنید» استفاده شده است. راه‌حل جبری این سؤال، سخت نیست، مگر این‌که در استفاده از پارامترها، اعتماد به‌نفس کافی نداشته باشید. لیکن بسیاری از یادگیرندگان نه معنای واقعی شیب را می‌دانند و نه با نمودارهای خط راست ـ آن‌طور که باید و شاید ـ دست‌ورزی کرده‌اند.

● تکلیف ۶: بیش‌تر یا کم‌تر

با یک مثلث مختلف‌الاضلاع شروع کنید. سپس سعی کنید جدول زیر را که درباره‌ی مثلث‌هایی است که روابط متفاوتی با این مثلث دارند، تکمیل کنید [نوع مثلث را تعیین کنید].

محیط / ارتفاع	بیش‌تر	هم اندازه	کم‌تر
بیش‌تر	محیط بیش‌تر، ارتفاع بلندتر	محیط هم اندازه، ارتفاع بلندتر	محیط کم‌تر ارتفاع بلندتر
هم اندازه	محیط بیش‌تر هم ارتفاع		محیط کم‌تر هم ارتفاع
کم‌تر	محیط بیش‌تر ارتفاع کوتاه‌تر	محیط هم اندازه، ارتفاع کوتاه‌تر	محیط کم‌تر ارتفاع کوتاه‌تر

این ساختار تکلیف، توسط همسرم، آن واتسون، براساس ایده‌ی دینا تیروش[11] توسعه یافته است و این نخستین باری است که آن را به دیگران نشان می‌دهم. هدف این است که توجه یادگیرنده را به جای خود مفاهیم، به روابط میان آن‌ها جلب کنیم. در این جا، رابطه‌ی میان ارتفاع و محیط تقریباً ساده است، لیکن این ساختار را می‌توان در بسیاری از موقعیت‌های دیگر نیز به کار برد. به‌عنوان مثال می‌توانید با یک مستطیل شروع کنید و در مورد تغییرات محیط و مساحت در هر یک از خانه‌های جدول سؤال کنید. گاهی بدون توسعه‌ی رده‌ی اشیای (در این مثال، مستطیل‌ها) نمی‌توان سایر اشیای مرتبط را درنظر گرفت.

در این جا دوباره از یادگیرندگان خواسته می‌شود که خانه‌های جدول را پر کنند، و الزاماً، محدوده‌ی مثال‌هایی را که می‌توانند در جدول قرار گیرند، کشف کنند، نه این‌که فقط یک مثال بزنند. به این ترتیب آن‌ها با چگونگی تأثیر متقابل دو خاصیت بر یکدیگر، آشنا می‌شوند.

بازتاب

یکی از قهرمانان یا افرادی که در کودکی تحت تأثیر وی بوده‌ام، عمر خیام بود؛ به دو دلیل: یکی این‌که پدرم، بعضی از رباعیات او را دائم می‌خواند، و دیگر این‌که زمانی که نوجوان بودم، شرح زندگی و فعالیت‌های ریاضی خیام را خواندم.

دوبیتی‌ای [که پدرم می‌خواند] این بود:

یک چند به کودکی به استاد شدیم
یک چند ز استادی خود شاد شدیم
پایان سخن شنو که ما را چه رسید
از خاک درآمدیم بر باد شدیم

که سه ترجمه‌ی مختلف به زبان انگلیسی از آن شده است:

Myself when young did eagerly frequent
Doctor and Saint and hear great argument
About it and about but ever more
Went out by the same door where in I went.

Pursuing knowledge in childhood we rise
Until we bocome masterful and wise
But if we took through the disguise
We see the lies of worldly ties

In childhood we strove to go to school
Our turn to teach, joyous as a rule
The end of the story is sad and cruel
From dust we came, and gone with winds cool.

این سه ترجمه از این دو بیتی، جنبه‌های مختلفی از یاددهی

و یادگیری ریاضیات را نمایش می‌دهد. نخست، وجود ترجمه‌های مختلف با معانی مختلف، شبیه روش‌هایی است که یادگیرندگان مختلف یک تکلیف ریاضی را به صورت‌های متفاوتی تفسیر می‌کنند. بعضی آن را هم‌چون یک مسئولیت سنگین می‌دانند که یا باید هرچه زودتر آن را تمام کنند، یا همان‌طور حل‌نشده آن را می‌گذارند؛ در حالی که سایرین آن را چیزی می‌دانند که باید انجام دهند تا یک جوری، یادگیری به طرز معجزه‌آسایی رخ دهد. دیگران، تکالیف را به‌عنوان فرصت‌هایی می‌دانند که در آن، از توانشان برای معنادار کردن ریاضیات و کسب حس ریاضی‌وار، گسترش و چالش [ذهنی] خویش، و درنتیجه یادگیری، استفاده می‌کنند. در تفسیرهای مختلف هدف تکلیف و آن‌چه که واقعاً تکلیف می‌خواهد نیز چنین تنوعی هست.

دوم، آخرین ترجمه‌ی شعر، از دور بی‌پایان بازتولید تجربه‌ی یادگیری کودک به‌عنوان یک معلم، خبر می‌دهد. من، قصد دارم از این فراتر بروم و بگویم که هر نسل، روش‌های عالمانه‌تر و کارآمدتری برای ترویج یادگیری، توسعه می‌دهد. ترجمه‌ی دوم، ترجمه‌ی موشکافانه‌تری است، که خبر می‌دهد که یادگیری، به‌عنوان شکلی از تسلط بر دنیا یا به‌عنوان یک هدف، در خودش شکلی از هم‌سان شدن[12] با جهان، ضمن از دست دادن ارتباط با پیشامدهای مهم‌تر است. تدریس را می‌توان به‌صورت وادار ساختن یادگیرندگان برای دیدن چیزهای بزرگ‌تر از میان روابط مادی دید. در مورد ریاضی، می‌توان آن را به معنی دست‌یابی به دنیای اَشکال و نمادها دانست. ترجمه‌ی بسیار مفسرانه‌ی فیتز جرالد[13]، به من یادآوری می‌کند که مناقشات علمی، من را ارتقاء نمی‌دهد؛ بلکه آن‌چه مهم است، تجربه‌های وسیع و یادگرفتن از این تجربه‌هاست. به‌عنوان یک معلم، ضروری است از طریق وادار ساختن یادگیرندگان به استفاده از کارهایی که با هستی آن‌ها عجین شده است، تجربه‌های آن‌ها را فرا بخوانیم. این اعمال روی اشیای ملموس و آشنا صورت می‌گیرند. طی چالشی که آن‌ها را به انطباق و توسعه‌ی اعمالشان و تجربه‌ی کارهای بدیع و بسیار قوی سوق می‌دهد، یادگیری نیز جذب می‌شود. در این صورت ممکن است این اعمال به جای یادگیرنده، به کارکرد آن‌ها ملحق شوند.

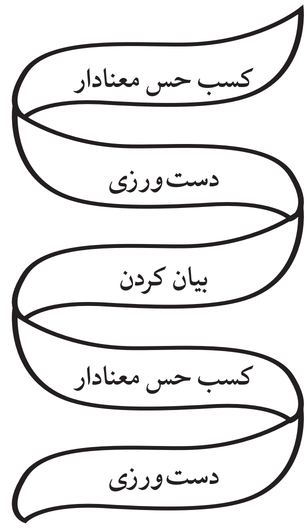
ساخت‌های روانی

من و همکارم در دانشگاه آزاد لندن، (فلوید و همکاران، ۱۹۸۱؛ هم‌چنین میسون و جان وایلدر، ۲۰۰۶/۲۰۰۴ را ببینید) تجارب منتخب خود در یاددهی و یادگیری را بیرون کشیدیم و در پرتو نظرات جروم برونر[14] (۱۹۹۶)، برای کمک به ایجاد ارتباط[15] با یکدیگر درباره‌ی طراحی و رهبری دروس[16]، ساخت‌هایی را توسعه دادیم.

MGA[17]

با وادار کردن یادگیرندگان به **دست‌ورزی** با اشیای ملموس و آشنا، [الزاماً] یادگیری تولید نمی‌شود. هدف از دست‌ورزی با اشیاء (این اشیاء می‌توانند فیزیکی، ذهنی، یا نمادی باشند) این است که نسبت به ساختارها یا روابط نهفته در آن‌ها، حس معناداری پیدا کنند. یکی از تم‌های مرکزی در ریاضیات، **ناوردایی در کانون تغییر**[18] می‌باشد. بنابراین، دست‌ورزی با اشیای ملموس، تشخیص روابط ناوردا را امکان‌پذیر می‌سازد و در همان حال، قدردان دامنه‌ی آن تغییراتی می‌شویم که در آن‌ها، آن ناوردا، ثابت می‌ماند. به‌عنوان مثال، تخصیص یک امر به‌منظور تعمیم آن، دست‌ورزی با حالت‌های ساده‌ی ملموسی است که اعتمادبه‌نفس را القا می‌کنند؛ به‌منظور دیدن امری کلی از درون امری خاص؛ آن امر کلی که در عین تغییر سایر اشیاء، ثابت می‌ماند. در تکلیف (۱)، مجموع دو عدد، ناوردا است (یعنی ۱) و منجر به دو محاسبه می‌شود که مقادیر یکسان دارند: یک ناوردای دیگر! در تکلیف (۲)، با آزمودن اعداد اعشاری مختلف، یادگیرنده با روش‌هایی که می‌توان توسط آن‌ها، یک عدد اعشاری را بزرگ‌تر کرد، مواجه می‌شوند، مشروط بر این محدودیت که کمتر از ۲/۵ باشد. یادگیرندگان تشویق می‌شوند بیش‌تر قدردان روابط میان اعداد اعشاری باشند.

کسب حسی معنادار از روابط و ناورداها، کمک مهمی به درک و فهم است، لیکن تا زمانی که سعی می‌کنید دیگران را متقاعد سازید که «دارید به آن‌ها درس می‌دهید»، نمی‌توانید مطمئن باشید که ایده‌های شما را فهمیده باشند. بنابراین، ما **بیان کردن** را به این‌ها افزودیم؛ عملی که در آن ابتدا در تلاش برای توصیف حس خود از روابط و ناورداها، دچار خطا می‌شوید، ولی با گذشت زمان، و با تلاش‌های مکرر، بیانات شما، منسجم‌تر و منطقی‌تر و نیزخلاصه‌تر و موجزتر می‌گردند. این بیانات، به عبارت‌های تکنیکی مرتبط با کلکسیونی غنی از مثال‌ها تبدیل می‌شوند، و بنابراین پایه‌ای



زمانی که قدری گیج می‌شوید یا میان تعمیم و تجرید گم می‌شوید، یا زمانی که روی مسأله‌ای کار می‌کنید، می‌توانید بازگشت کنید و به عقب برگردید و مثال‌های بسیار بسیار آشنا (مثال‌های خاص) را درنظر بگیرید تا از آن‌چه که گفته می‌شود یا انجام می‌شود، حس معناداری کسب کنید. پس از آن می‌توانید برای خودتان تعمیم یا تجرید را بیان کنید، و درنتیجه آن را با داشته‌های خودتان تلفیق می‌کنید.

برای دست‌ورزی‌های آینده می‌گردند. نتیجه‌ی آن، مارپیچ یادگیری است که در شکل بالا، نشان داده شده است.

رویکرد دیگری به همین ایده‌ها، این است که برحسب رفتار یادگیرندگان فکر کنیم. یک تکلیف، می‌تواند ضمن دست‌ورزی با اشیاء، آن‌ها را به تلاش درباره‌ی موضوعی از همان نوع یا انواع دیگر، وادار کند. زمانی که از آن‌ها می‌خواهیم با خودشان و با دیگران درباره‌ی کاری که انجام داده‌اند، صحبت کنند، پیشگویی کنند، حدس‌هایی بزنند، و آن حدس‌ها را بیازمایند، به آن‌ها کمک می‌کنیم تبیین ساختارهای نهفته در روابط را توسعه دهند[و این ساختارها را بهتر بیان کنند].

ثبت و ضبط، به ویژه با استفاده از عبارت‌های تکنیکی، توسط تلاش و صحبت کردن حمایت می‌شود، و خود، به تبیین فصیح‌تر و «تلاش» متمرکزتر، کمک می‌کند. ما از سه تایی تلاش ـ صحبت ـ ثبت و ضبط[۱۹]، به عنوان یک یادآور[۲۰] استفاده می‌کنیم که یادگیرندگان را با گزارش‌های کتبی، دست‌پاچه می‌کند، به‌ویژه نوشته‌هایی که در آن‌ها نمادها برای یادگیرندگان، ناآشنا یا مجرد هستند؛ این کار نسبت به زمانی که آن‌ها را درگیر فعالیت‌هایی می‌کنیم که در آن هم کاری انجام می‌دهند و هم صحبت می‌کنند و پس از آن، از کارهایشان یک گزارش کتبی می‌دهند، کمتر کارآمد است.

توانایی‌ها

در دهه‌ی ۱۹۸۰، صحبت درباره‌ی **فرآیندهای تفکر**[۲۱] متداول بود(میسون و همکاران، ۱۹۸۲). ولیکن من دیده‌ام که بسیاری از این‌ها، همان توانایی های طبیعی[ذهنی] هستند که هر یادگیرنده‌ای که به مدرسه می‌رود، پیش از آن ابراز کرده است. پرسش اساسی این است که آیا همه‌ی این توانایی‌ها با درس‌های ریاضی شکل گرفته‌اند، یا به دلایل فرضی کارایی و ضرورت، معلم و نویسنده‌ی متن کتاب درسی، این توانایی‌ها را غصب کرده‌اند و سعی می‌کنند کاری برای یادگیرندگان انجام دهند.

تخصیص و تعمیم

جورج پولیا(۱۹۶۲) اشاره کرده است که جستجوی مثال‌های خاص یا حالت‌های خاص یا حالت‌های خیلی خاص، برای کارکرد بشر، اساسی است: زمانی که با تجرید یا تعمیم مواجه می‌شوید، سعی می‌کنید مثال‌ها یا مثال نقض‌هایی را در تجارب خودتان بیابید. من امیدوارم خوانندگان این مقاله، این کار را برای خودشان انجام دهند. هدف از تخصیص همان‌طور که پیش از این گفتیم، درک حس معنادار از موضوع و قدردان روابط ساختاری نهفته در آن موضوع (به‌عنوان یک موضوع عمومی) بودن است. بنابراین ضمن این اعمال، یادگیرنده می‌تواند موضوعات عمومی را که حاوی یک موضوع ریاضی است، بازسازی کند و گسترش دهد. هنگامی که در یک کتاب درسی، حالت‌های خاص معرفی می‌شوند و یک گزاره‌ی عمومی بیان می‌شود، نویسنده جای یادگیرنده را می‌گیرد. لازم است یادگیرندگان را تشویق کنم که خودشان از مثال‌های خاص، تعمیم دهند؛ و نیز تشویقشان کنیم زمانی که با یک امر عمومی یا مجرد مواجه می‌شوند، آن را تخصیص دهند.

حدس زدن و قانع کردن

افراد دائم حدس می‌زنند: حوادث غیرمترقبه، شاهدی هستند بر این که انتظارات ما ـ حتی انتظارات ضمنی ما ـ نقش برآب می‌شوند. به گفته‌ی پولیا، در ریاضیات، حدس زدن خیلی مهم است؛ آن را از خارج از خود بـه دست آوردن و سپس بـه آن شک کردن: بررسی مثال‌های بیش‌تر (تخصیص)، تلاش برای یافتن مثال‌های نقض، یا تلاش به منظور توجیه آن حدس برای خود و دیگران. متقاعد شدن نسبت به حدس خودمان، کار ساده‌ای است. پس از آن، یاد گرفتنِ به چالش کشیدن حدس‌های افراد دیگر، اهمیت دارد چرا که در این صورت خواهید توانست ضمن این چالش‌ها، حدس‌های خود را نیز بهبود ببخشید. برای شکوفایی تفکر ریاضی، ضروری است که فضاهای کلاس درس، فضای حدس باشد: یک شیوه‌ی کاری که در آن هر حرفی که توسط معلم یا توسط یادگیرندگان زده می‌شود، به‌عنوان حدسی است که باید جرح و تعدیل شود. به جای تأکید بر یک جواب درست یا یک روش درست یا غلط، هر کمکی، به‌عنوان یک حدس دیده می‌شود که ممکن است نیاز به اصلاحات داشته باشد، پس دیگران «از شما دعوت می‌کنند براساس مثال‌های نقض مطرح‌شده، حدس خود را اصلاح کنید.»

تجسم و بیان

همه کس این توان را دارد که تجسم کند و زبان، ابزاری است که توسط آن، آن‌چه را که تجسم کرده‌ایم، در قالب کلمات، موسیقی، هنر یا رقص، بیان می‌کنیم. اغلب در ریاضیات، اشیاء مورد نظر، تجسمی هستند نه فیزیکی؛ بنابراین ضروری است که روی توسعه‌ی توانایی تجسم یادگیرندگان، کار کنیم. من از تکالیف (۱) و (۵) برای جلب توجه ویژه به این جنبه‌ی انسانی، استفاده کردم، لیکن این جنبه در تمام تفکرات ریاضی وجود دارد. زمانی که تلاش می‌کنید درک معناداری از روابط ساختاری به دست آورید، در واقع در دنیای تجسمات کار می‌کنید.

در ریاضیات، ما تجسمات خود را توسط نمودارها و نمادها، ضمن پیشنهاد حالت‌های خاص یا ویژه‌ای که انتظار داریم توسط آن‌ها، دیگران به امر کلی مورد نظر ما دست یابند، بیان می‌کنیم.

بچه‌های کوچک دوست دارند اشیاء را مرتب کنند، و آن‌ها را به شیوه‌های مختلف بچینند. تکالیفی که بر مبنای مرتب‌کردن اشیای ریاضی بنا شده‌اند، ابزارهای آموزشی قوی‌ای برای تحریک یادگیرندگان به آگاهی از وجوه تشابه و وجوه تمایز بین آن اشیاء ـ به عنوان روشی برای درک مفاهیم و قدردانی از آن‌ها ـ می‌باشند (سُوان، ۲۰۰۶).

ریاضی‌دان‌ها هم، ضمن رده‌بندی اشیاء، آن‌ها را دسته‌بندی و مرتب می‌کنند؛ به همین دلیل من از تکلیف (۴) استفاده کردم. بیش‌تر محتوای ریاضی، درباره‌ی یافتن توصیفی دیگر از ویژگی‌هایی است که مجموعه‌ای از اشیاء را تعریف یا مشخص می‌کنند. به بیان دیگر، ویژگی‌های مشخصه، ناورداهایی در مرکز تغییر آن مثال‌ها هستند. هرچقدر یادگیرندگان، به فضای غنی‌تر و وسیع‌تری از مثال‌ها دسترسی داشته باشند، درک و قدردانی آن‌ها از مفاهیم، عمیق‌تر است. فرنس مارتُن (مارتن و بوت، ۱۹۹۷) چنین ابراز کرده است که «یادگیری، درباره‌ی آگاه شدن از جنبه‌های بیش‌تری است که می‌توانند تغییر کنند (وجوه تنوع[۲۲]) بدون مثال‌هایی که مثال بودن خود را از دست می‌دهند.»

برای استدلال منسجم و متقاعدکننده در ریاضیات، ضروری است که ویژگی‌هایی را که مجموعه‌های دقیق از اشیاء را مشخص می‌کنند، بیابیم. سپس با استفاده از این ویژگی‌ها می‌توانیم دلایلی درباره‌ی آن‌چه که باید اتفاق بیفتد، بیاوریم. پس، اعداد فرد، با این ویژگی که به شکل $2n-1$ یا $2n+1$ هستند مشخص می‌شوند؛ همه‌ی اعداد اول یا باید به شکل $6n+1$ باشند یا به شکل $6n-1$، و مانند این‌ها. تکلیف(۴) قصد دارد حاوی تجربه‌ی رده‌بندی باشد.

موافق بودن و مدعی

همه کس این توان را دارد که ابتکار به خرج دهد، حدس‌هایی بزند، تخصیص کند، تعمیم دهد، در دنیای ریاضی عمل کند: به بیان دیگر، **ادعا کند**. هم‌چنین، این قدرت را دارد که عقب بنشیند و صبر کند تا به او دیکته شود، صرفاً راضی باشد، با آن‌چه که در کتاب‌های درسی یا توسط معلم گفته می‌شود، **موافقت کند**. یادگیرندگانی که نسبت به آن‌چه قرار است بیاید، پیش‌دستی می‌کنند (مانند تکلیف ۱)، چیزی یاد می‌گیرند؛ زیرا حدس می‌زنند و حدس خود را می‌آزمایند و لذا از تجربه‌ی خویش، چیزی یاد می‌گیرند. درحالی که یادگیرندگانی که راضی به قبول

همه‌چیز هستند و عقب می‌نشینند و معتقدند اگر تلاش کنند، یک جوابی به دست خواهند آورد، احتمالاً در آزمون‌هایی که سؤال‌های آن، همه‌چیز هست مگر پرسش‌های متداول (روتین)، ناگهان بیدار خواهند شد!

مضامین ریاضی

چندین مضمون وجود دارد که ریاضیات مدرسه‌ای را پُر کرده است و به یادگیرندگان کمک می‌کند یگانگی و ساختار ریاضی را به‌عنوان یک کل، به صورت معناداری درک کنند.

ناوردایی در مرکز تغییر

همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، می‌توان بیش‌تر ریاضیات را جستجو یا تشخیص روابط ناوردایی دانست که هنگام تغییر جنبه‌هایی خاص، ثابت می‌مانند. بنابراین، مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث در صفحه، ناوردا است؛ هرچند که شکل یا اندازه‌ی مثلث‌ها را می‌توان تغییر داد. نسبت ضلع مقابل به وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، تحت تغییر مقیاس، ثابت است (چرا که خود زاویه‌های مثلث نیز تحت این تغییر ناوردا هستند). لذا تانژانت یک زاویه، تحت تغییر اندازه‌های اضلاع آن زاویه، ناوردا است.

با جلب توجه به ناورداها و اجازه‌ی تغییر دادن برخی جنبه‌ها، به یادگیرندگان کمک می‌کنید قدردان ریاضی به عنوان یک حوزه‌ی تحقیقی نظام‌مند باشند، نه این‌که آن را جعبه ابزاری از تکنیک‌ها برای حل مسایل استاندارد قلمداد کنند.

یکی از اَشکال هوشمندانه‌ی ناوردایی در مرکز تغییر این است که تکلیف(۲) را بگیرید و آن را این‌طور تغییر دهید که یادگیرنده‌ها اعدادی بسازند که از بالا به $\frac{۵}{۲}$ برسند. به‌عنوان مثال، اعداد اعشاری را بخواهید که در آن‌ها رقم ۵، مجاز باشد و نیز استفاده از رقم ۱ در آن‌ها نیز اجباری بوده و تا حد امکان به عدد $\frac{۵}{۲}$ نزدیک باشند. در این‌جا، آن‌چه ناوردا است، هدف تکلیف است (تا حد امکان نزدیک بودن به $\frac{۵}{۲}$) که درون محدودیت‌های بین ۲ و ۳ بودن و داشتن ارقامی خاص و... قرار گرفته است. هم‌چنین مفاهیم دنباله و حد در هر دو صورت تکلیف، مشترک هستند.

آزادی و محدودیت

این مضامین نیز در سراسر ریاضی مدرسه‌ای پُر شده‌اند، هرچند که من صریحاً به آن‌ها اشاره نکرده‌ام. زمانی که از یادگیرندگان می‌خواهیم مسأله‌ای را حل کنند، آن‌ها می‌توانند آن را به‌عنوان چیزی که در آغاز کاملاً آزاد است ببینند (مثلاً یک یا دو عدد که جواب‌های یک معادله هستند)، اما بعداً محدودیت‌هایی به آن‌ها افزوده می‌شود. من سعی کردم تجربه‌ای مانند این را در تکلیف (۳) و به ویژه در تکلیف (۵) بگنجانم که در آن، تک‌تک محدودیت‌ها با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا تکلیفی چالش‌برانگیز بسازند. من تکلیف (۵) را با همان ترتیبی که انجام دادم نشان داده‌ام که در آن هریک از محدودیت‌های خاص، به تنهایی آمده است. قصدم این بود که نشان دهم یادگیرنده می‌تواند از قسمت چهارم شروع کند و برای خودش، آن را به مؤلفه‌هایی بشکند، ضمن این‌که به یک جفت خط دلخواه فکر می‌کند که به مرور محدودیت‌هایی روی آن‌ها گذاشته می‌شود.

Doing & Undoing

زمانی که یک ریاضی‌دان در **انجام** (Doing) کاری مانند حل یک مسأله یا اثبات یک حدسیه، موفق می‌شود، کششی طبیعی او را به تلاش برای معکوس کردن آن فرآیند می‌کشد؛ یعنی Undo کردن آن! مثلاً کم کردن یک عدد از عدد دیگر، **انجام** کار است. زمانی که پاسخ تفریق را به یادگیرنده می‌دهید و از او می‌پرسید کدام جفت اعداد، این پاسخ را تولید کرده‌اند ـ مانند تکلیف (۳) ـ آن را بسیار خلاقانه‌تر می‌کنید. باز هم معمولاً متداول است که برای این‌که ببینیم آیا یادگیرندگان ارزش مکانی را فهمیده‌اند یا نه، از آن‌ها بپرسیم کدام یک از دو عدد اعشاری داده شده، بزرگ‌تر هستند. لیکن می‌توانیم مانند تکلیف (۲)، پرسش خلاقانه‌تر و جستجوگرانه‌تری مطرح کنیم و بخواهیم برای خود، اعداد اعشاری‌ای بسازند که بلندتر و بلندتر می‌شوند و برای این کار، نیازمند مقایسه‌ی اعداد نیز باشند.

استفاده از ساخت‌ها برای تدریس و برای تدریس به معلمان

ثابت شده است که MGA و DTR، به همراه توانایی‌ها و مضامین ریاضی، در یادآوری آن‌چه که معلمان تلاش می‌کنند در کلاس‌های درس به آن دست یابند، و لذا در انتخاب مثال‌ها توسط معلمان، شیوه‌های تعاملشان با یادگیرندگان، و توقعاتشان از یادگیرندگان، کارآمد هستند.

اگر توقعاتتان کوچک باشد، آن‌چه به دست می‌آورید نیز کوچک است؛ اگر توقعاتتان بزرگ باشد، باز هم آن‌چه به دست

می‌آورید، کوچک است. لیکن سه تا از عواملی که بیش از سایر عوامل، موفقیت یادگیرندگان را محدود می‌سازد، انگیزه و توقع آن‌ها از خودشان، انتظارات صریح و ضمنی ابراز شده توسط معلمان، و توقعات صریح و ضمنی ابراز شده توسط والدین آن‌ها است. مردم‌شناسان، علاقه‌مند هستند که بگویند

فقدان شواهد، شاهدی بر فقدان نیست.

در آموزش ریاضی، این به این معنی است که فقط به این دلیل که یک یادگیرنده مسأله‌ای را حل نمی‌کند، نمی‌توان نتیجه گرفت که او نمی‌تواند؛ او فقط حل نکرده است! در هر زمان، عوامل زیادی ممکن است وجود داشته باشند که به رفتار وی کمک کنند. اگر توقعمان را در حد دست‌یابی به رفتار جاری تقلیل دهیم، معلم، با اشتباه گرفتن فقدان شاهد به جای شاهد فقدان، گرفتار یک مارپیچ نزولی از یأس و پیشرفت کم می‌شود. شواهد رو به رشدی وجود دارد که زمانی که یادگیرندگان را، به عنوان افراد صاحب قدرت و توان که می‌توانند یکدیگر را در کار با هم حمایت کنند، می‌انگاریم؛ و زمانی که در تلاش برای تفکر ریاضی، ضمن استفاده از توانایی‌هایشان حمایت می‌شوند، می‌توانند سؤال‌هایی را در آن حل کنند که مانند آن را تا قبل از آن هرگز ندیده‌اند (واتسون و همکاران، ۲۰۰۴؛ واتسون، ۲۰۰۷). چینی‌ها می‌گویند

> اگر به شخصی یک ماهی بدهید، او را برای یک روز سیر کرده‌اید؛ و اگر به او ماهیگیری را یاد بدهید، او را برای همه‌ی عمر سیر کرده‌اید (یا حداقل تا زمانی که ذخایر موجود تمام شوند!).

معلمان می‌توانند با تجمع مجموعه‌ای از وقایع کلاسی با ساخت‌هایی مانند MGA و DTR و با توانایی‌ها و مضامین ریاضی، احتمال این را که در زمان‌های مورد نیاز، ایده‌های مفید به ذهنشان خطور کند را تقویت کنند (میسون، ۲۰۰۲). به عنوان مثال، هنگامی که تلاش می‌کنم یادگیرندگان نمادهای مجرد را به کار ببرند، احتمالاً DTR یا MGA به‌عنوان یادآور به ذهن می‌رسند که انجام دادن و صحبت کردن، مفیدند اگرچه پیش از تلاش برای بیان توسط نمادهای خلاصه، ضروری نیستند. به‌عنوان مثالی دیگر، هنگامی که یک مثال حل شده را برای یادگیرندگان مرور می‌کنم، کار را قطع کنیم و از آن‌ها بخواهیم درحالی که تکنیک مورد نظر کار می‌کند، آن‌چه را که می‌توان تغییر داد، و چگونگی این تغییر را در مثالی خاص در نظر بگیرند.

در یکی از کارگاه‌هایی که برگزار کردم، پیشنهادم این بود که تغییر کوچکی، که تنها چند دقیقه از زمان یک روز را می‌گیرد، بهترین راه کشف چنین ایده‌هایی است. به محض این‌که یادگیرندگان به انواع جدید پرسش‌ها و خواسته‌ها، انواع جدید تکالیف، و روش‌های جدید فکر کردن عادت می‌کنند (واتسون و میسون، ۱۹۹۸)، احتمال دارد که بیش‌تر و بیش‌تر پاسخ مثبت بدهند و درحقیقت تقاضای کار بیش‌تری مشابه با آن‌ها را داشته باشند. اگر سعی کنید خیلی زیاد و خیلی سریع تغییر دهید، صرفاً با مقاومت در برابر ناآشنایی با کارها مواجه می‌شوید.

مثلاً به جای این‌که از یادگیرندگان بخواهید برای تکلیف شب، «پرسش‌هایی که شماره‌ی فرد دارند را انجام دهید»، از آن‌ها بخواهید «آن تعداد از پرسش‌ها را حل کنید که لازم است تا بتوانید پرسش‌هایی از این نوع را پاسخ دهید.» ابتدا آن‌ها متوجه نمی‌شوند از آن‌ها چه می‌خواهید، ولی پس از کمی توضیح، می‌بینید که منظور از انجام تمرین‌ها، به دست آوردن جواب نیست، بلکه این است که بفهمیم چگونه و چه موقع یک تکنیک، کار می‌کند.

هم‌چنین پیشنهاد کردم از یادگیرندگان بخواهیم در پایان هر فصل، تمرین‌های شخصی خود را بر روی کارت‌هایی بنویسند، به‌طوری که هر از گاهی، بتوانند به کارت‌ها مراجعه کنند و آن‌ها را با ترتیبی که به نظر مناسب می‌رسد، مرتب کنند. زمانی که حساسیت‌های خودشان برای مرتب کردن کارت‌ها را با حساسیت‌های دیگران ـ و احتمالاً با حساسیت‌های معلم ـ مقایسه می‌کنند، متوجه می‌شوند که راه‌های کم و بیش مفیدی برای نگاه به مسایل وجود دارد. این کار می‌تواند کمک کند برای امتحان‌هایی که در آن باید «نوع» سؤال را هرچه سریع‌تر تشخیص دهند تا برای حل آن از تکنیک مناسب استفاده کنند، آماده شوند.

تدریس، با **قراردادهای ضمنی**[۲۴]، (بروسیو، ۱۹۹۷) که در آن یادگیرندگان اعتقاد دارند که اگر تکالیفی را که به ایشان داده می‌شود انجام دهند به طرز معجزه‌آسایی، یادگیری رُخ خواهد داد؛ به بن‌بست رسیده است. این بدین معنی است که یادگیرندگان مایلند صریحاً به ایشان گفته شود که باید چه کار کنند (بنابراین خواهند توانست تکالیف را با حداقل تلاش و انرژی، انجام دهند). اما معلم، تحت فشار است، چرا که هرچه معلم، صریح‌تر، شفاف‌تر و واضح‌تر بگوید که یادگیرندگان برای تکمیل تکالیف چه باید بکنند، برای یادگیرندگان ساده‌تر است

که کاری که از آن‌ها خواسته شده است را انجام دهند بدون این که واقعاً با ریاضی برخورد کنند، بدون این که ریاضی‌وار فکر کنند، بدون این که چیزی یاد بگیرند. بنابراین از نظر آموزشی، تکالیف مؤثر آن‌هایی هستند که یادگیرندگان را به استفاده از توانایی‌های خودشان و بازخوانی اعمال مرسوم در عین انطباق یا اصلاح آن‌ها برای مواجه شدن با چالش‌های جدیدی تشویق کنند. به این ترتیب به تمِ اصلی خود باز می‌گردم، که تکالیف تنها، فقط چالش است؛ فعالیت تنها، فقط انجام دادن است؛ تجربه‌ی تنها فقط روشی برای وقت‌گذرانی است. برای این که یادگیری واقعی رخ دهد، در تکالیف باید فعالیت‌هایی تولید شود که ضمن آن، یادگیرندگان؛ استفاده از توانایی‌های خود و نقش مضامین ریاضی را تجربه کنند، و ضمن تعامل با معلم، توجهشان به این توانایی‌ها و مضامین جلب شود به‌طوری که زمانی که بر آن‌چه در درس اتفاق افتاده است بازتاب می‌کنند، واقعاً چیزی یاد بگیرند. به بیان دیگر، آن‌ها فضای مثال‌های خویش را غنا می‌بخشند و کارهای جدید را با دانش خویش تلفیق می‌کنند و نسبت به مفاهیم، زبان‌آورتر می‌شوند و نسبت به دامنه‌ی وسیعی از اشیاء، مطمئن‌تر می‌گردند.

از نظر من، تدریس به صورت دنباله‌ای از اعمال و تعاملات و دنباله‌ای از تصمیمات گرفته شده توسط معلم، «در زمان اتفاق می‌افتد». در عوض، یادگیری، به‌عنوان فرآیند بلوغ، حتی در زمان خواب، «طی زمان اتفاق می‌افتد». لیکن تنها زمانی یادگیری رخ می‌دهد که یادگیرندگان را به جای این که همیشه تسلیم و موافق باشند» به ادعا کردن، حدسیه‌سازی و دفاع از حدسیه‌ها، و استفاده از توانایی‌های دیگرشان دعوت کنیم.

زیرنویس‌ها

1. Open University
2. Tasks
3. Activity
4. Experience
5. Reflection
6. Zone of Proximal Development
7. Specialising
8. Anne Watson
9. Characterising
10. Accessible Example Space
11. Dina Tirosh
12. Identification
13. Fitz Gerald
14. Jerome Bruner
15. Communicate
16. Planning & Conducting Lessons
۱۷. ابتدای کلمات **M**anipulating و **G**etting-A-Sense-of و **A**rticutating که به‌ترتیب به معنای دست‌ورزی، کسب حس معنادار و بیان کردن می‌باشند.
18. Invarience in the midst of Change
۱۹. ابتدای سه کلمه‌ی **D**oing و **T**alking و **R**ecording به معنای تلاش، صحبت، ثبت و ضبط.
20. Reminder
21. Thinking Processes
22. Demensions of Variation
۲۳. عنوان این بخش را ترجمه نکردم، زیرا تصور می‌کنم خود واژگان اصلی، بار معنایی دارند که در فارسی، معادل مناسبی برای آن‌ها نیست (مترجم).
24. Didactic Contract

منبع ترجمه شده

* Mason, John, (2007). Using Theoretical Constructs to Inform Teaching, IMEC9.

منابع

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics: Didactiques des Mathématiques,* 1970-1990, Balacheff, N. Cooper, M. Suther land, R. and Warfield, V. (trans.), kluwer, Dordrecht.
Bruner, J. (1966). *Towar ds a Theory of Instruction*, Cambridge: Harvard University Press.
Christiansen, B. and Walther, G. (1986). Task and Activity, in B. Christiansen, G. Howson & M. Otte, *Perspectives in Mathematics Educatiion,* Dordrecht, Reidel, p 243-307.
Floyd, A., Burton, L., James, N., & Mason, J. (1981), *EM 235: Developing Mathematical Thinking.* Milton Keynes: Open University.
Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.
Mason, J. Burton L. & Stacey K. (1982). *Thinking mathematically.* London: Addison Wesley.
Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004/2006). *Designing and Using Mathematical Tasks.* Milton Keynes: Open University, republished (2006). St. Albans: Tarquin.
Mason, J. (2002). *Researching Your own Practice: The Discipline of Noticing*. London: Routledge Falmer Pólya, G. (1962) *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (combined edition), Wiley, New York.
Swan, M. (2006). Collaborative Learning in Mathematics: a challenge to our beliefs and practices. London: National Institute of Adult Continuing Education.
Valsiner, J. (1988). *Developmental Psychology in the Soviet Union.* Brighton: Harvester.
Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: learners generating examples.* Mahwah: Erlbaum.
Watson, A. De Geest, E. & Prestage, S. (2004). *Deep progress in mathematics: the improving attainment in mathematics project*, Oxford: Dept. of Education, Oxford University.
Watson, A. & Mason, J. (1998). *Questions and Prompts for Mathematical Thinking.* Derby: Association of Teachers of Mathematics.
Watson, A. (2007). *Raising Achievement in School Mathematics.* Maidenhead: Open University Press.