مقدمه

آشنایی مقدماتی با زبان و نمادهای ریاضی، کسب آمادگی لازم برای مطالعه‌ی سایر علوم، توانایی استدلال کردن، مهارت در حل مسأله و مدل‌سازی، از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی دردوره‌ی دبیرستان است که معلمان ریاضی به عنوان بخشی از اعضای جامعه‌ی آموزشی، در تحقق این اهداف نقش به‌سزایی دارند.

ورود دانش‌آموزان به دوره‌ی متوسطه و آشنا شدن آن‌ها با درس ریاضی ۱، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین دروس پایه‌ی اول دبیرستان، به‌منزله‌ی آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم بیش‌تری از حوزه‌ی ریاضی است؛ زیرا دانش‌آموزان پس از پشت سر گذاشتن دوره‌ی راهنمایی، در سال اول دبیرستان با نمادها، روابط و مفاهیم مجرد بیش‌تری روبه‌رو می‌شوند که تفاوت عمده‌ای با مفاهیم اشاره شده در این دوره دارد. در کتاب ریاضی۱، دانش‌آموزان با مفاهیم متنوعی از جبر، هندسه و مثلثات آشنا می‌شوند اما این کتاب، بیش‌تر بر مفاهیم جبری متمرکز است. در حالی که ریاضیات دوره‌ی راهنمایی، بیش‌تر شامل مفاهیم حسابی است. لذا، دانش‌آموزان با حوزه‌ی جدید جبر آشنایی بیش‌تری پیدا می‌کنند که این آشنایی در بیش‌تر مواقع، موجب بدفهمی‌های زیادی در یادگیری مفاهیم ریاضی می‌گردد.

آن‌چه در این مقاله به آن اشاره می‌شود، برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضی است که هم در ادبیات پژوهشی مستند شده است و هم تجربه‌ی بسیاری از معلمان ریاضی، وجود این بدفهمی‌ها را تأیید می‌کند.

ریاضی ۱ و بدفهمی‌های دانش‌آموزان

یوسف آذرنگ
دبیر ریاضی سردشت آذربایجان غربی

جبر و پیدایش آن

به گفته‌ی تال[۲] (۱۹۹۶)، یکی از صورت‌های ریاضی، ریاضیات مجرد یا نمادین است و حساب، جبر و حسابان نمونه‌هایی از ریاضیات مجرد هستند که اغلب از اشیای جهان واقعی ناشی شده‌اند و همراه با محاسبات و دست‌ورزی با نمادها، توسعه یافته‌اند. در مقطع دبیرستان، با معرفی مفاهیم جبر و حسابان در کتاب‌های ریاضی، ریاضیات نمادین و صورت‌های آن چهره‌ی غالب‌تری بر صورت‌های ملموس و غیر رسمی آن دارد که همین امر موجب می‌شود دانش‌آموزان در برخورد با مفاهیم ریاضی و یادگیری آن با مشکلات زیادی مواجه شوند.

خوارزمی، ریاضی‌دان معروف ایرانی که در سده‌ی نهم زندگی می‌کرد، با نوشتن کتاب «الجبر و المقابله» برای اولین بار واژه‌ی «جبر» را نام‌گذاری کرد. وی در این کتاب، نخستین قانون‌های کلی برای حل معادلات درجه‌ی۱ و ۲ را ذکر کرده است. لذا از نگاه اول، جبر موضوعی برای منظم کردن قانون‌های کلی، تبدیل عبارت‌ها و حل معادله‌ها بوده است. عمر خیام (۱۱۲۲-۱۰۴۸)، شاعر و ریاضی‌دان بزرگ ایرانی هم، جبر را به‌عنوان علمی که برای حل معادله‌ها به‌کار می‌رود تعریف کرده است. شهریاری (۱۳۸۰)، در مورد پیدایش جبر و ورود نمادهای حرفی به آن ابراز می‌دارد که جبر به‌دنبال حساب پدید آمد و ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰) برای نخستین بار،

آغاز به نوشتن مسأله‌ها به‌صورت کلی کرد و مقدارهای مجهول را با حرف‌های صدادار لاتین و مقدارهای معلوم را با حرف‌های بی‌صدا نشان داد و برای نخستین بار، دستورهای حرفی پدید آمد که از ویژگی‌های اصلی جبر امروزی است.

بنابراین، چیزی که دانش‌آموزان در دبیرستان و از جمله ریاضی۱ با آن سروکار دارند، جبر مقدماتی است که شامل کار بر روی نمادهای حرفی، انجام عملیات ریاضی با آن‌ها، حل معادله و ساده کردن عبارت‌هاست.

کیپرن[۵] (۱۹۹۶) در همین ارتباط بیان می‌کند که «حداقل در جبر مقدماتی، جبر ابزاری است که به موجب آن، نه‌تنها اعداد و کمیت‌ها را با نمادهای حرفی معرفی می‌کنیم، بلکه با این نمادها محاسبه هم انجام می‌دهیم» (ص ۲۷۱).

حال با پیدایش این نمادگذاری جبری و معرفی اعمال ترکیبی به کمک این نمادگذاری که کتاب‌های درسی ریاضی مملو از آن است، موضوع یادگیری جبر و موانع یادگیری آن، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند و به‌طور قطع همین نمادگذاری‌ها و پیچیدگی مفاهیم ناشی از به‌کارگیری حروف، یکی از مهم‌ترین موانع یادگیری جبر به‌حساب می‌آید. لذا، بررسی‌ها و تحقیقات بیش‌تر در این مورد جهت برطرف کردن موانع موجود، مفید خواهند بود.

جبر و مشکلات یادگیری دانش‌آموزان

به دفعات دیده شده است که دانش‌آموزان کلاس‌های اول دبیرستان در حساب و اعمال مربوط به آن مشکل دارند و به‌راحتی نمی‌توانند جمع و تفریق عددهای گویا را انجام دهند. پیداست که این دسته از دانش‌آموزان، در برخورد با عبارت‌های جبری، با مشکلات بیش‌تری مواجه خواهند شد. وقتی که آن‌ها در محاسبه‌ی اعداد کسری و حتی در محاسبه با اعداد صحیح مهارت کافی ندارند، نمی‌توان انتظار داشت که آن‌ها در محاسبه با چندجمله‌ای‌ها و عبارت‌های جبری به‌خوبی عمل کنند. اما در مواجهه با تمام بخش‌های کتاب ریاضی۱، دانش‌آموزان با بدفهمی‌های متنوعی روبه‌رو هستند که عمده‌ترین آن‌ها مربوط به چندجمله‌ای‌ها، معادله‌ی خط و نسبت‌های مثلثاتی است که به‌طور مختصر به آن‌ها اشاره می‌شود:

ـ در بخش چندجمله‌ای‌ها، استفاده از اتحادها، تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها و ساده کردن عبارت‌های گویا، از قسمت‌های پردردسر و مشکل‌آفرین برای دانش‌آموزان است. مشکلات یادگیری در این قسمت‌ها، بسیار زیاد و رفع بدفهمی‌ها هم دوچندان مشکل است. به‌طور مثال، بعد از حل چند نمونه مثال از اتحاد مربع دوجمله‌ای، باز مشاهده می‌شود که بسیاری از دانش‌آموزان در برگه‌های امتحانی، در استفاده از این اتحاد به‌صورت زیر عمل می‌کنند: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. یا این‌که در به‌کارگیری اتحادها، تشخیص درست و مناسبی ندارند. در تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها هم، وضع بدتر است و عموماً نمی‌دانند در تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای، به چه روشی عمل کنند. البته بسیاری از بدفهمی‌ها در ارتباط با اتحادها، تجزیه و ساده کردن عبارت‌های گویا، به قسمت‌های قبلی درس برمی‌گردد ـ جایی که آن‌ها در جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها به راحتی نمی‌توانند اعمال و محاسبات جبری لازم را انجام دهند. موارد زیر، نمونه‌هایی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است که تجربه‌ی بسیاری از معلمان ریاضی، آن‌ها را تأیید می‌کند:

۱) $2x - x = 2$

۲) $\frac{3x}{x} = 2x$

۳) $\frac{\cancel{2}x + y}{\cancel{2}} = x + y$

۴) $\frac{xy + \cancel{x}}{\cancel{x}} = xy$

۵) $2x + 4x + 1 = 7x$

۶) $(2x^3)^3 = 6x^9$

بسیاری از یافته‌های پژوهشی نیز، بدفهمی‌هایی مشابه بالا را تأیید کرده‌اند. به‌عنوان مثال، تال (۲۰۰۲) در ارتباط با بدفهمی‌های دانش‌آموزان در جبر، به برخی از تعمیم‌های نادرست اشاره می‌کند که آن‌ها در یک زمینه‌ی جدید انجام می‌دهند. به‌عنوان نمونه، با اشاره به ساده کردن عبارت $1 + 2x + 3$ و رسیدن به جواب $6x$، چنین بدفهمی‌هایی را ناشی از این می‌دانند که دانش‌آموزان، اعمال حسابی را به صورت نادرست به جبر هم تعمیم می‌دهند که گویا و حسام (۱۳۸۴)، از آن به‌عنوان مداخله‌ی طرح‌واره‌ی قبلی در یادگیری جدید نام برده‌اند. زیرا طرح‌واره‌ی قبلی دانش‌آموز در مورد اعمال حسابی با جمع جبری جملات متشابه (یادگیری جدید)،

تداخل پیدا می‌کند.

فیشباین و موزی کانت[6] (۲۰۰۲) نیز، بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در جبر، از مسیر دیگری بررسی می‌کنند. آن‌ها در مطالعه‌ای، در ارتباط با ساده کردن عبارت‌ها و حل معادلات به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان با به‌کار بردن تبدیلات درست قادر بودند معادلاتی نظیر $\frac{x}{۲}+\frac{x-۳}{۴}-\frac{۵x}{۸}=۱$ را حل کنند، ولی برای ساده کردن عبارت $\frac{x}{۲}+\frac{x-۳}{۴}-\frac{۵x}{۸}$ که مشابه همان کاری است که در حل معادله‌ی بالا انجام داده بودند، با به‌دست آوردن مخرج مشترک، به پاسخ ناقص $۴x+۲(x-۳)-۵x$ رسیده بودند. فیشباین و موزی‌کانت با مرتبط کردن عمل دانش‌آموزان به درک رابطه‌ای و درک ابزاری[7]، اظهار داشتند به‌دلیل این‌که جبر را به صورت رابطه‌ای یاد نگرفته بودند، نتوانستند عبارت را به درستی ساده کنند.

انجام دادن ریاضی یک چیز و تفکر در ریاضی چیزی دیگر است. زمانی که ما درگیر فعالیت‌های جبری هستیم، در واقع ریاضی انجام می‌دهیم. اما مسأله این است که آیا به لحاظ ریاضی، در حال تفکر هستیم یا خیر

در همین ارتباط، غلام‌آزاد (۱۳۸۰) اشاره می‌کند که «سردرگمی دانش‌آموزان بین ساده کردن عبارت‌ها و حل معادله‌ها وقتی آشکار می‌شود که دانش‌آموزان به سمت راست یک معادله به‌عنوان جواب اشاره می‌کنند یا وقتی عبارتی را ساده می‌کنند، به آن به صورت یک معادله نگاه می‌کنند و شروع به حل آن می‌کنند و کنجکاو خواهند بود که ببینند وقتی همه‌ی جملات شامل x حذف می‌شوند، بر سر x چه می‌آید» (ص۸).

لذا در ساده کردن عبارت‌ها و حل معادلات می‌توان گفت که علامت تساوی نقش مهمی دارد. بدین صورت که دانش‌آموزان در حساب، یاد گرفته‌اند که به دنبال تساوی، همواره جواب می‌آید. شاید هم اگر در ساده کردن عبارت $۳+۲x+۱$ به جواب $۶x$ می‌رسند، به این دلیل است که آن‌ها بر مبنای عملی که در حساب انجام می‌دهند، می‌خواهند به یک عدد یا جمله برسند. در حل معادلات هم آن‌گونه که مشهود است، مفهوم هم‌ارزی دو عبارت و دو معادله برای آن‌ها تداعی نشده است.

ـ در ارتباط با دستگاه مختصات و مفاهیم مربوط به آن، از جمله مختصات وسط پاره‌خط، طول پاره‌خط، معادله‌ی خط و غیره، دانش‌آموزان باز هم با مشکلات زیادی مواجهند. با وجود آشنایی نسبی آن‌ها در دوره‌ی راهنمایی با نمایش نقطه روی دستگاه مختصات، رسم خط و نظایر این‌ها، دیده شده است که دانش‌آموزان سال اول دبیرستان در یادگیری همین مفاهیم ساده، به‌طور جدی مشکل دارند. به کرات مشاهده شده است که آن‌ها در پاسخ به سؤالات این بخش، مفاهیم را با هم قاطی می‌کنند. به‌طور مثال، اگر در سؤالی از آن‌ها خواسته شده است که معادله‌ی خطی را بنویسند که از نقاط معلوم A و B بگذرد، به اشتباه سؤال دیگری را پاسخ داده‌اند؛ یعنی گاهی طول پاره‌خط AB یا مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورده‌اند.

برخی دیگر از مشکلات یادگیری هم مربوط به عدم‌تسلط کافی بر اعمال حسابی و جبری است. به عنوان مثال، اگر دانش‌آموزان نمی‌توانند به‌راحتی دو نقطه از معادله‌ی $۳x+۲y=۸$ را پیدا کنند، بیش‌تر به این دلیل است که در جای‌گذاری اعداد به‌جای حروف و اعمال ساده‌ی جبری مربوط به آن، مشکل دارند. حتی مشاهده شده است که در نوشتن معادله‌ی خط، شیب خط یا به‌دست آوردن فاصله‌ی یک نقطه از خط، به سادگی نمی‌توانند اعمال لازم را انجام دهند و عملاً در درگیری با مفاهیم ساده‌ی جبری، با اشتباهات زیادی مواجه می‌شوند.

علاوه بر این‌ها، مفاهیم مربوط به دستگاه مختصات، از نوع هندسی هستند و ارایه‌ی آن‌ها با زبان جبر و معرفی آن‌ها در قالب قواعد و فرمول‌ها، دانش‌آموزان را با اشتباهات مفهومی زیادی مواجه می‌سازد. درگیر شدن دانش‌آموزان با روابط و فرمول‌های جبری از یک طرف و نبود زمینه‌های کافی و مناسب برای مرتبط کردن این روابط با مفاهیم هندسی، موجب شده است که این بدفهمی‌ها دوچندان شود؛ به طوری که در برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان مشاهده می‌شود که به لحاظ جبری می‌توانند طول پاره‌خط AB را با دو نقطه‌ی معلوم A و B پیدا کنند ولی در نمایش پاره‌خط روی دستگاه مختصات مشکل دارند، یا تصور این‌که $x=۰$ معادله‌ی خطی است که طول

تمام نقاط آن صفر می باشد برای آن ها دشوار است. لذا مفاهیم مورد بحث، ارتباط تنگاتنگی با جبر و هندسه پیدا می کنند و اگر دانش آموزان نتوانند یک پل ارتباطی مناسب بین جبر و هندسه برقرار کنند، نمی توان به رفع بدفهمی های آنان امیدوار بود.

ـ افزون بر این ها، بخش نسبت های مثلثاتی نیز از مهم ترین و مشکل ترین بخش های کتاب ریاضی ۱ است. مفاهیم این بخش، انتزاعی تر از سایر مفاهیم کتاب به نظر می رسد. به همین دلیل، بیش تر دانش آموزان در یادگیری مفاهیم آن و هم چنین حل مسایل این بخش، به طور جدی مشکل دارند. مفاهیم مثلثاتی، وابستگی زیادی به مفاهیم دیگر از جمله زاویه، نسبت، اشکال هندسی مانند مثلث و روابط بین اجزای مثلث دارند. پس اگر دانش آموزان در یادگیری مفاهیم مرتبط و با درجه ی انتزاعی پایین تر مشکل دارند، نمی توان انتظار داشت به راحتی بتوانند مفاهیم مثلثاتی را یاد بگیرند. به طور مثال، می توان به بحث روابط بین نسبت های مثلثاتی اشاره کرد که اکثر دانش آموزان در یادگیری و استفاده ی مناسب از آن ها با مشکلات زیادی مواجهند. مثلاً، دانش آموزی که به خوبی اتحاد مربع دوجمله ای را یاد نگرفته است، طبیعی است که برای اثبات درستی رابطه ی $(\sin\beta+\cos\beta)^2+(\sin\beta-\cos\beta)^2=2$ مشکل داشته باشد. لذا، با تداوم این بدفهمی ها در پایه های بالاتر، عملاً دانش آموزان در یادگیری مفاهیم بیش تر و پیچیده تر این حوزه، با سختی های زیادی روبه رو خواهند شد. به عنوان نمونه، برخی اوقات بدفهمی هایی مشابه $\sin(a+b)=\sin a+\sin b$ در پایه ی دوم و سوم به چشم می خورد و یا این که گاهی دیده می شود که در کسر $\frac{\sin\theta}{\theta}$، θ ها را با هم حذف می کنند. به طور کلی، رفع بدفهمی های دانش آموزان در این حوزه، نیازمند بازنگری جدی برنامه های درسی و ایجاد زمینه های مناسب برای شروع و معرفی مفاهیم مثلثاتی و هم چنین، به کارگیری ابزارها و روش های تدریس مناسب تر است.

ریشه یابی بدفهمی های دانش آموزان

به گفته ی گویا و حسام (۱۳۸۴)، آشنایی با بدفهمی های معرفی شده در ادبیات پژوهشی حوزه ی آموزش ریاضی، باعث می شود تا بتوان ذهنیت روشن تری نسبت به این که بدفهمی ریاضی چیست، پیدا کرد.

بیش تر بدفهمی های دانش آموزان در ریاضی ۱، به طرح واره های ذهنی و نحوه ی شکل گیری و بسط آن ها باز می گردد و اغلب مشاهده می شود که طرح واره های خلق شده توسط دانش آموزان، یک پارچه و منسجم نیستند. لذا، نباید اشتباهات مفهومی یا بدفهمی ها را ناشی از عدم تمرکز، بی دقتی و امثال آن دانست، بلکه باید ریشه ی آن ها را در طرح واره های ذهنی افراد جست وجو کرد.

برای توضیح بیش تر، در برخورد با یادگیری مفاهیم ریاضی، بنابر نظریه ی رشد شناختی پیاژه، فرآیند سازگاری به دو صورت جذب[8] و انطباق[9] صورت می گیرد. از نظر پیاژه، جذب وقتی صورت می گیرد که شخص مطالب تازه ای را بر حسب مطالب آشنا ببیند؛ یعنی در موقعیتی تازه، رفتاری را انجام دهد که در موقعیت های گذشته انجام می داده است. به طور مثال، دانش آموزی که برای به توان رساندن یک جمله ای ها، یاد گرفته است به صورت $(ab)^2=a^2b^2$ عمل کند، در به دست آوردن حاصل عبارت $(a+b)^2$ نیز ممکن است به همین صورت عمل کرده و جواب a^2+b^2 را به دست آورد. بنابراین، به گفته ی موسی پور (۱۳۸۲)، باید از ارایه ی اطلاعات کاملاً منطبق با ساختار کنونی دانش افراد خودداری کرد، چرا که در این صورت، تنها جذب به وقوع خواهد پیوست و اصلاح و تغییر ساختار دانش و درنتیجه رشد، تحقق نخواهد یافت. وی اشاره می کند که از ارایه ی اطلاعات کاملاً بیگانه با ساختار کنونی دانش افراد نیز باید خودداری شود زیرا در این صورت، عمل جذب اطلاعات هرگز اتفاق نمی افتد. بدین صورت درمی یابیم در بسیاری از مواقع، عمل جذب یا انطباق در یادگیری مفاهیم ریاضی به درستی صورت نمی گیرد.

علاوه بر این، یادگیری فرمول وار و انجام اعمال ریاضی بر پایه ی رویه ها، نزد دانش آموزان رواج زیادی دارد. معمولاً دانش آموزان عادت دارند برای حل مسایل ریاضی، از رویه های از پیش تعیین شده استفاده کنند تا بتوانند حداقل در سایه ی آن، به جواب قانع کننده ای برسند. آن چه که رویه ها و قواعد ریاضی به دانش آموزان یاد می دهد این است که به آن ها کمک می کند تا بدانند که چگونه اعمال ریاضی را انجام دهند، البته به شرطی که دانش آموزان بتوانند رویه ها و قواعد را به درستی به کار گیرند. به عنوان مثال، برای حل معادله ی درجه ی دوم

شناسایی و کشف بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد، زیرا آن‌ها می‌توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی‌های دانش‌آموزان تعدیل کنند. تشخیص بدفهمی‌ها کمک خواهد کرد که بفهمیم چه روشی، کی و کجا در یادگیری دانش‌آموزان مؤثر است. آگاهی از فرآیندهای ذهنی آن‌ها، معلمان ریاضی را کمک خواهد کرد تا درصدد ایجاد تغییرات مناسب در روش یادگیری و کشف روش‌های بهتر باشند و دانش‌آموزان را با هدف‌های عالی‌تر درس‌های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن‌ها با دنیای واقعی آشنا سازند

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ ، روش Δ یک رویه‌ی خاص است که معمولاً دانش‌آموزان، علاقه‌ی زیادی به استفاده از آن دارند، ولی استفاده از رویه‌های مشخص همیشه برای آن‌ها ساده نیست. مثلاً رسم سهمی با معادله‌ی مشخص $y - y_1 = a(x - x_1)^2$ که در کتاب درسی ریاضی ۱ وجود دارد، برای بسیاری از دانش‌آموزان مشکل است و آن‌ها قادر نیستند مختصات رأس، معادله‌ی محور تقارن و در ادامه، نمودار سهمی را به‌درستی رسم کنند. در هر حال، دانش‌آموزان در حل مسایلی که به گونه‌ای بیانگر رویه و روش خاص است راحت‌تر عمل می‌کنند، هرچند که در برخی موارد در بازخوانی آن رویه و طی مسیر حل مسأله، با مشکلاتی مواجه می‌شوند. لذا، با این توضیحات، یادگیری رویه‌ای و ابزارگونه‌ی دانش‌آموزان را نمی‌توان بی‌ارتباط با طرح‌واره‌های ذهنی آن‌ها دانست؛ زیرا تصور بسیاری از دانش‌آموزان این است که در برخورد با هر مسأله‌ی ریاضی، باید از قبل قاعده یا روشی برای حل داشته باشند. چنین تصوری در مورد ریاضی و حل مسأله‌ی ریاضی موجب می‌شود که دانش‌آموزان در بسط و بازسازی طرح‌واره‌های ذهنی خود، با مشکلات زیادی مواجه شوند و بدفهمی‌های آن‌ها عمیق‌تر و ریشه‌دارتر شود. بنابراین، بهتر است که انجام دادن اعمال ریاضی با نوعی تفکر همراه باشد تا بتوان با درایت خاصی مسیر حرکت را کنترل و رهبری کرد.

تفکر جبری در مقابل جبر

انجام دادن ریاضی یک چیز و تفکر در ریاضی چیزی دیگر است. زمانی که ما درگیر فعالیت‌های جبری هستیم، در واقع ریاضی انجام می‌دهیم. اما مسأله این است که آیا به لحاظ ریاضی، در حال تفکر هستیم یا خیر. کیرن (۱۹۹۶) به نقل از لاو (۱۹۸۶)، اظهار می‌دارد که جبر اکنون «معنی دادن به نمادها» نیست بلکه ماورای آن است و به خودی خود، به وضعیت‌هایی از تفکر مرتبط است که اساساً جبری هستند. برای مثال، نحوه‌ی برخورد و رفتار با مجهول، معکوس کردن و قرینه کردن اعمال، دیدن کلیت در حالت خاص. آگاهی یافتن از این فرایندها و در کنترل قرار دادن آن‌ها چیزی است که به لحاظ جبری، تفکر معنی می‌شوند. بدین جهت، یادگیری جبر در یک روش رابطه‌ای مستلزم استفاده از روش‌های بهتری است و تکرار و تمرین مطالب، شاید تأثیر چندانی نداشته باشد. لذا داشتن نوعی تفکر در جبر و حل مسایل آن و ایجاد راه‌کارهای مناسب برای برخورد با حروف جبری، ضروری است. مفاهیم در قالب‌های رسمی و به صورت نمادین، پرمحتوا هستند و معانی آن‌ها به سادگی آشکار نیست. پس، به‌کارگیری زبان ریاضی در شکل ظریفی لازم است. به‌عنوان مثال، می‌توان در معرفی و توصیف یک مفهوم ریاضی، از بازنمایی‌های گوناگون استفاده نمود و تنها به استفاده‌ی سرراست قواعد و رویه‌ها قناعت نکرد. دانش‌آموزی که برای حل یک معادله از رسم نمودارها استفاده می‌کند و قادر به تشخیص جواب روی نمودارها است، در مقابل دانش‌آموزی که از یک رویه‌ی خاص جبری استفاده می‌کند، هوشمندانه‌تر عمل می‌کند. زیرا وی قادر است مفاهیم جبری را به زبان هندسی ترجمه و تفسیر کند و ابزارهای هندسی را که قابل فهم‌تر و ملموس‌ترند به ابزارهای جبری مقدم بدارد.

بنابراین، بهتر است در برخورد با مفاهیم جبری، دانش‌آموزان را با مسیرهای مناسب‌تری آشنا سازیم و ضرورتاً تنها به ابزارهای نمادین ـ حرفی اتکا و اکتفا نکنیم. توصیف یک معادله و ساختن یک مسأله‌ی کلامی برای آن، حل معادله

به کمک رسم نمودار، جمع دو تابع از روی نمودار آن‌ها، ارایه‌ی مدل‌های هندسی برای اتحادهای جبری و استفاده از مثال‌های عددی در مواجه با مفاهیم انتزاعی، همه و همه کمک خواهند کرد تا مفاهیم ریاضی و به‌ویژه مفاهیم جبری را بهتر درک کنیم.

ضروری است ما به‌عنوان معلمان ریاضی، چنین تفکر واگرایی را در دانش‌آموزان تقویت کنیم. چیزی که امروزه، بیش‌تر با روح فرآیند یادگیری سازگار است.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

شناسایی و کشف بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد، زیرا آن‌ها می‌توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی‌های دانش‌آموزان تعدیل کنند. تشخیص بدفهمی‌ها کمک خواهد کرد که بفهمیم چه روشی، کی و کجا در یادگیری دانش‌آموزان مؤثر است. آگاهی از فرآیندهای ذهنی آن‌ها، معلمان ریاضی را کمک خواهد کرد تا درصدد ایجاد تغییرات مناسب در روش یادگیری و کشف روش‌های بهتر باشند و دانش‌آموزان را با هدف‌های عالی‌تر درس‌های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن‌ها با دنیای واقعی آشنا سازند.

بنابراین، می‌توان جهت رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان موارد زیر را در نظر گرفت:

۱) تدریس هر مفهوم ریاضی بر مبنای شهود دانش‌آموزان باشد. یعنی، سعی شود در هر بحث ریاضی، ابتدا شهود یادگیرنده نسبت به آن موضوع تحریک و تقویت شود. به‌طور مثال، بهتر است از مثال‌های ساده و روشن استفاده گردد.

۲) مفاهیم ریاضی درجات متنوعی از انتزاع را شامل می‌شوند. لذا در معرفی هر مفهوم، به یادگیرنده و درجه‌ی انتزاع آن مفهوم توجه شود.

۳) دانش‌آموزان را هدایت کنیم برای یادگیری ریاضی، بنا به سلیقه‌ها و توانایی‌های خودشان عمل کنند و آن‌ها را مجبور به استفاده از یک روش ثابت نکنیم.

۴) بازتاب بیش‌تری روی بدفهمی‌های دانش‌آموزان داشته باشیم و سریع از آن‌ها نگذریم. هم‌چنین، در ارایه‌ی مفاهیم ریاضی، به معلومات و دانش یادگیرنده اهمیت بیش‌تری بدهیم. معلمی که به این امر توجه دارد، بهتر می‌تواند دانش‌آموزان خود را در بسط و بازسای طرح‌واره‌های ذهنی‌شان یاری نماید.

۵) بهتر است تقدم و تأخر مطالب، هم در تدریس و هم در سازمان‌دهی محتوای درسی، به خوبی رعایت شوند.

۶) دانش‌آموزان را کمک کنیم مفاهیم را برای خود کشف یا خلق کنند و از انتقال مستقیم آن‌ها و تدریس بر پایه‌ی رویه‌ها، خودداری کنیم.

۷) مفاهیم ریاضی را با زمینه‌های واقعی و ملموس آن پیوند دهیم و دانش‌آموزان را هدایت کنیم مفاهیم مجرد ریاضی را با چهره‌های واقعی و مثال‌های روشن از دنیای واقعی لمس کنند.

زیرنویس‌ها

1. Misconception
2. Tall
3. Abstract
4. Vietia
5. Kieren
6. Fischbein & Muzicant
7. Relational and Instrumental Understanding
8. Assimilation
9. Accommondation

منابع

1. Kieren, E. (1996). The Changing Face of School Algebra. 8th International Congress on Mathematics Education (ICME-8). Selected Lectures, Sevilla, 14-21.

2. Fischbein, E., and Muzicant, B. (2002). Richard Skemp and His Conception of Relational and Instrumental Understanding: Open Sentences and Phrases. In D. Tall & M. O. j Thomas (Eds.), Inteligence, Learning and Understanding Mathematics, 49-78, Post Pressed Flaxton, Australion.

3. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuties in Long-Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O. j Thomas (Eds.). Inteligence, Learning and Understanding Mathematics, Post Pressed Flaxton, Australion.

۴. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها و امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی (۱۳۷۵)، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵. شهریاری، پرویز. (۱۳۸۰)، **سرگذشت ریاضیات**، نشر مهاجر.

۶. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰). دوباره‌نگری به برنامه‌ی جبر دبیرستانی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۳، صص ۴ تا ۱۲، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. گویا، زهرا و حسام، عبدالله. (۱۳۸۴). نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۲، صص ۴ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸. موسی‌پور، نعمت‌الله. (۱۳۸۲). **مبانی برنامه‌ریزی آموزش متوسطه**، نشر آستان قدس رضوی.

۹. کتاب ریاضی ۱ متوسطه.