درباره‌ی معادله‌ی $x^y = y^x$

وای. اس. کوپیتز و اچ. مارتینی
ترجمه: محمدرضا درفشه
دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران

۱. مقدمه

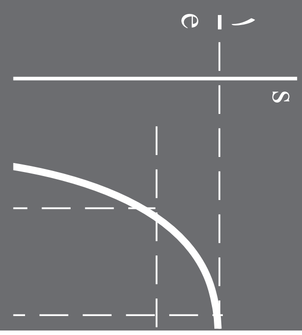
به نظر می‌رسد که معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، در حیطه‌ی ریاضیات رها شده باشد، تنها می‌دانیم که در جمله‌ی [۲] از آن یادی شده است.

هدف ما در این نوشته، بررسی حل این معادله است. در نگاه اول روشن نیست که به ازای چه مقادیری از $y > 0$ جواب نابدیهی برای $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، وجود دارد، یعنی مقداری چون $x \neq y$ ، $x > 0$ ، به طوری که (x,y) در معادله صدق کند. این مطلب در پاراگراف ۱، جایی که دیده می‌شود مجموعه‌ی جواب‌های نابدیهی در $(x, y) = (e,e)$ متمرکز می‌شود، مورد بحث قرار می‌گیرد.

این نقطه، نقطه‌ی تجمع مجموعه جواب‌های گویای نابدیهی معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ است (پاراگراف ۲)، و یک نقطه‌ی دوگانه (منفرد) از منحنی‌ای که معادله‌ی آن $x^y = y^x$ می‌باشد (پاراگراف ۳).

پس از اتمام این مقاله به مرجع [۱] برخوردیم که در آن بحث تاریخی جالبی درباره‌ی معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، نوشته شده است. از آن مقاله یاد می‌گیریم که قبلاً اویلر این معادله را بررسی کرد و نمایش پارامتریک (۴) را که در ادامه می‌آید کشف نمود، و سپس با استفاده از آن، جواب‌های گویای (۵) را استخراج کرد. وی هم‌چنین دو خط مجانب ($x = 1$ و $y = 1$) منحنی را می‌شناخت. هم‌چنین دانیل برنولی در نامه‌ای به گلدباخ اعلام می‌کند که جواب‌های گویای معادله را پیدا کرده است. ای. جی. مولتون در [۴] بحثی مفصل درباره‌ی منحنی با معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، انجام می‌دهد، که شامل گزاره ۱ زیر (بدون ارائه‌ی حل صریح) و شکلی مشابه شکل ۲ است. اما بحث ما در این مقاله پیشرفته‌تر از بحث مقاله‌ی مولتون است.

آر. سی. آرچی‌بالد با ابزار بیش‌تری (در [۱]) تحقیقات زیادی مرتبط با معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ را می‌یابد، و به همه‌ی آن‌ها (تا سال ۱۹۲۱ م) ارجاع می‌دهد. ما نتوانستیم کارهایی که پس از این تاریخ یا سال‌های اخیر درباره‌ی این معادله انجام شده را بیابیم. با این‌که همه‌ی تحقیقات انجام شده را به کمک Math. Rev. مرور نکرده‌ایم، برداشتمان این است که قضیه‌ی ۱ (سرشت‌نمائی جواب‌های گویا) تازگی دارد و در مجموع، حل کاملی از معادله‌ی $x^y = y^x$ ارائه می‌دهد؛ در حالی که دیگران فقط با حالت‌های خاص این معادله کار کرده‌اند.



۲. جواب‌های نابدیهی $x^y=y^x$

برای این که بعداً دچار سردرگمی نشویم، بهتر است به‌جای معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x,y>0$ ، معادله‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$t^m = m^t,\ t\ ,\ m>0 \qquad (1)$$

که در آن m یک «پارامتر» و t «مجهول» است.

گزاره ۱. معادله‌ی (۱) دارای جواب نابدیهی است اگر و تنها اگر $1<m\neq e$ ، و به ازای چنین mای، این جواب منحصربه‌فرد است.

برهان. قرار می‌دهیم $u(t)=\frac{\ln t}{t}$ ، $t>0$ ، و با گرفتن لگاریتم از دو طرف(۱) دیده می‌شود که (۱) هم‌ارز معادله‌ی زیر است:

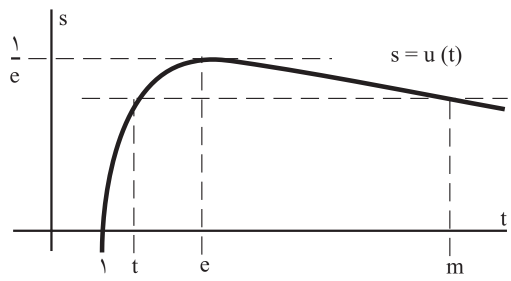
$$u(t)=u(m)\ ,\ t>0 \qquad (2)$$

که در آن $m>0$ یک پارامتر می‌باشد.

تعداد جواب‌های نابدیهی (۲) را می‌توان برحسب مجموعه‌ی پیش ـ تصویر $u(m)$ تحت u بیان کرد:

(۳) تعداد جواب‌های $t\neq m$ برای(۲)= تعداد $\left(u^{-1}(u(m))\right)-1$

که $u^{-1}(s)$ ، مجموعه‌ی پیش ـ تصویرهای s تحت u است.



شکل ۱

چون $u'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$ ، u در بازه‌ی $(0,e]$ صعودی است، و به ازای $t=e$ ، مقدار ماکسیمم $u(e)=\frac{1}{e}$ را اختیار می‌کند، و در بازه‌ی $[e,\infty)$ نزولی است. چون

$$\lim u(t)=\begin{cases}0\ , & t\to\infty \quad \text{به ازای}\\ -\infty\ , & t\to 0^{+} \quad \text{به ازای}\end{cases}$$

خطوط $s=0$ و $t=0$ ، به ترتیب مجانب‌های افقی و عمودی نمودار $s=u(t)$ می‌باشند (شکل۱). از این‌رو

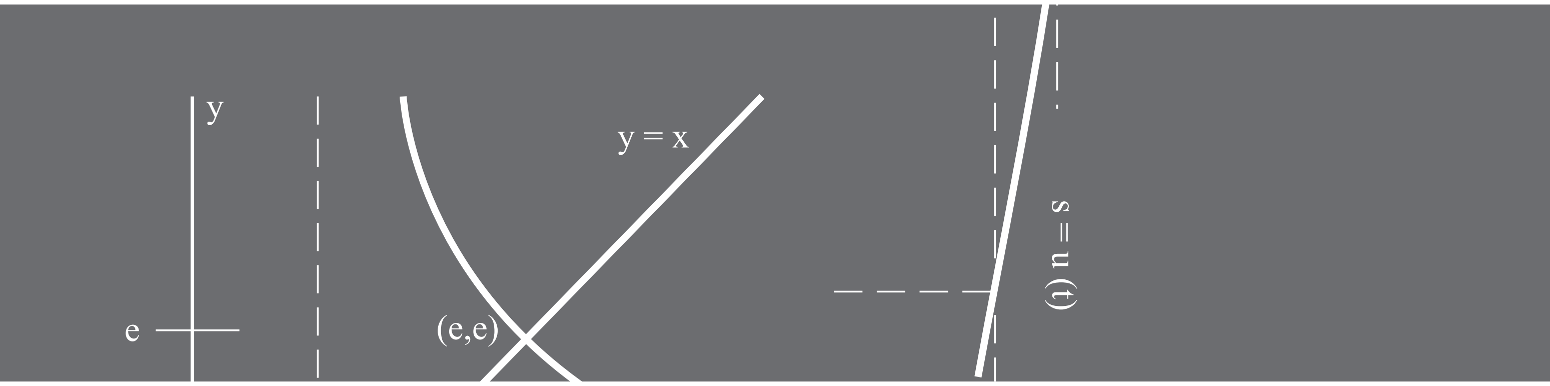
$$\#\left(u^{-1}(s)\right)=\begin{cases}0\ ,\ \frac{1}{e}<s & \text{اگر}\\ 1\ ,\ s\le 0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{e} & \text{اگر}\\ 2\ ,\ 0<s<\frac{1}{e} & \text{اگر}\end{cases}$$

و متناظراً

$$\#\left(u^{-1}(u(m))\right)=\begin{cases}0\ ,\ m\le 0 & \text{اگر}\\ 1\ ,\ 0<m\le 1 \ \text{یا}\ m=e & \text{اگر}\\ 2\ ,\ 1<m\neq e & \text{اگر}\end{cases}$$

که بنابه (۳)، گزاره ثابت می‌شود.

نقش m و t در گزاره‌ی ۱، قابل تعویض است. از این‌رو اگر گزاره‌ی ۱ را در مورد $x^y=y^x$ (که $(m,t)\to(x,y)$) اعمال کنیم نتیجه می‌گیریم که برای $1<x\neq e$ ، عدد منحصربه‌فرد y، $1<y\neq e$ ، وجود دارد به‌قسمی که (x,y) یک جواب نابدیهی $x^y=y^x$ است $(x,y>0)$. به‌این ترتیب نگاشت پوشای $x\to\varphi(x)$ از $(1,\infty)/\{e\}$ به‌خودش حاصل می‌شود. در اینجا نقش x و y قابل تعویض‌اند، از این‌رو نمودار $y=\varphi(x)$ نسبت

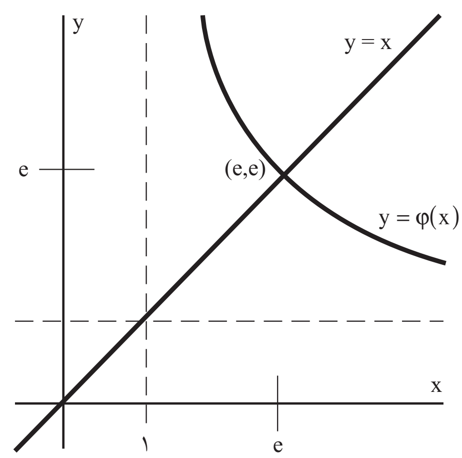


به خط $y=x$ متقارن است، یعنی $\varphi(\varphi(x))=x$ (برگردان).

بررسی نمودار $s=u(t)$ (شکل ۱) نشان می‌دهد که زمانی که m در بازه‌ی $(1,\infty)$ افزایش می‌یابد جواب متناظر $t\neq m$ از (۱) در بازه‌ی (e,∞) نزول می‌کند، و برعکس. بنابراین، φ در بازه‌ی $(1,\infty)/\{e\}$ اکیداً نزولی است. بررسی مشابه نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to e}\varphi(x)=e \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1}\varphi(x)=\infty$$

با استفاده از آخرین حد می‌توان با تعریف $\varphi(e)=e$ تابع φ را در $x=e$ پیوسته ساخت. چون $4^2=16=2^4$، $\varphi(2)=4$ و $\varphi(4)=2$. منحنی $y=\varphi(x)$ در شکل ۲ نمایش داده می‌شود.



نمودار ۱

گزاره ۲. تنها جواب‌های صحیح و نابدیهی معادله‌ی $x^y=y^x$، $x,y>0$، عبارتند از (۲,۴) و (۴,۲).

برهان. چون تنها عدد صحیح در بازه‌ی $[1,e]$ عبارت است از ۲ و $\varphi(2)=4$ پس (۲,۴) تنها نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $y=\varphi(x)$ است، $1<x\le e$. بنا به تقارن، (۴,۲) نیز تنها نقطه با مختصات صحیح روی این نمودار به‌ازای $e\le x<\infty$ است.

۳. جواب‌های گویای معادله‌ی $x^y=y^x$

فرض کنید (x,y) یک جواب نابدیهی از معادله‌ی $x^y=y^x$، $x,y>0$، است و قرار دهید $y=px$. در این صورت $p\neq 1$ و $p>0$ و $x^y=y^x$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x^{px}=(px)^x \Rightarrow (x^x)^p=p^x x^x \Rightarrow (x^x)^{p-1}=(x^{p-1})^x=p^x$$

درنتیجه $x^{p-1}=p$ یا به طور معادل $x=p^{\frac{1}{p-1}}$.

قرار می‌دهیم $h=\frac{1}{p-1}$، $h\in IR-[-1,0]$ (چون $p\neq 1$، $p>0$)

یعنی $p-1=\frac{1}{h}$، $p=1+\frac{1}{h}$ و درنتیجه $x=(1+\frac{1}{h})^h$.

چون $y=px$ پس $y=(1+\frac{1}{h})(1+\frac{1}{h})^h=(1+\frac{1}{h})^{h+1}$.

بنابراین

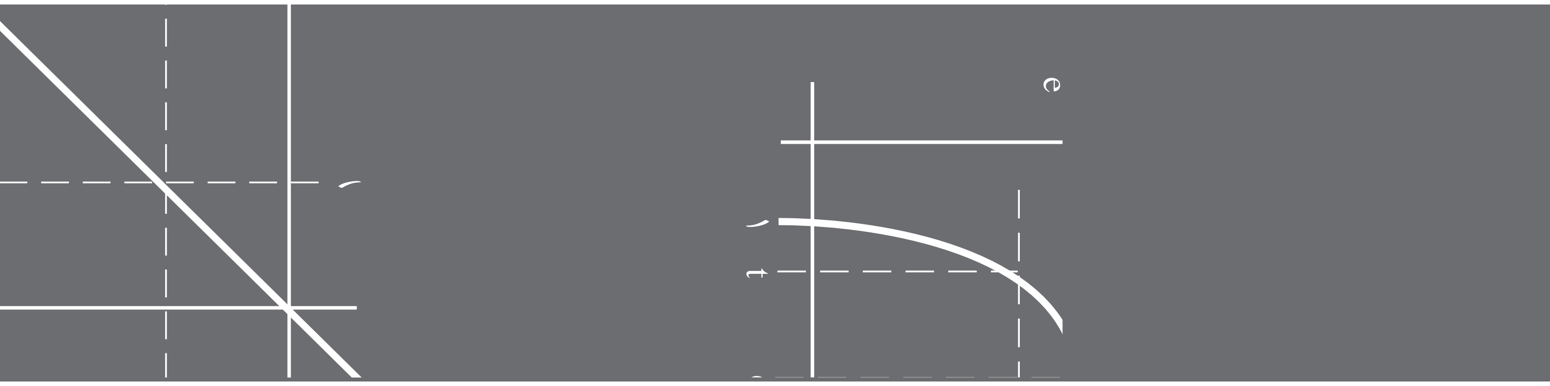
$$(x,y)=\left((1+\frac{1}{h})^h,(1+\frac{1}{h})^{h+1}\right) \qquad (4)$$

$h\in IR-[-1,0]$، یک جواب نابدیهی و پارامتری از معادله‌ی $x^y=y^x$، $x,y>0$، است. توجه کنید که اگر $h\to\infty$ آن‌گاه $(x,y)\to(e,e)$. به‌ازای $n\in Z-\{-1,0\}$،

$$(x,y)=\left((1+\frac{1}{n})^n,(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right) \qquad (5)$$

که یک جواب نابدیهی و گویای معادله‌ی $x^y=y^x$، $x,y>0$ می‌باشد.

قضیه ۱. اگر (x,y) یک جواب نابدیهی و گویای معادله‌ی $x^y=y^x$، $x,y>0$، باشد آن‌گاه به‌ازای $n\in Z-\{-1,0\}$ ای،



به شکل (۵) است.

برهان. چون برای هر $k\in Z-\{-1,0\}$ داریم

$$(1-\frac{1}{k+1})^{-(k+1)+1}=(\frac{k}{k+1})^{-k}=(\frac{k+1}{k})^{k}=(1+\frac{1}{k})^{k}$$

پس کافی است حالت $y>x$ را در نظر گرفته و ثابت کنیم که در این حالت به ازای nای، (x,y) به شکل (۵) است. بنابراین فرض می‌کنیم که (x,y) یک جواب گویای $x^y=y^x$ با شرط $y>x>0$ باشد. پس $p=\frac{y}{x}>1$ گویاست و $h=\frac{1}{p-1}$ یک عدد گویای مثبت است. قرار می‌دهیم $h=\frac{n}{\alpha}$ که $n,\alpha\in IN$ و $(n,\alpha)=1$ (در اینجا (k,k') بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک k و k′ است). در این صورت بنابه (۴) می‌توان نوشت

$$x=(1+\frac{1}{h})^h=(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}=(\frac{n+\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}$$

فرض کنید $x=\frac{u}{v}$، $u,v\in IN$ و $(u,v)=1$. آن‌گاه $\frac{u}{v}=x=(\frac{n+\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}$ که از آن نتیجه می‌شود $(\frac{n+\alpha}{n})^n=(\frac{u}{v})^\alpha$ و از این رو

$$\frac{(n+\alpha)^n}{n^n}=\frac{u^\alpha}{v^\alpha} \qquad (۶)$$

چون $(n,\alpha)=1$ پس $(n+\alpha,n)=1$ و $((n+\alpha)^n,n^n)=1$. مشابهاً، چون $(u,v)=1$ پس $(u^\alpha,v^\alpha)=1$.

نتیجه می‌گیریم که هر دو طرف تساوی (۶)، شکل ساده‌شده‌ای از یک عدد گویاست، از این رو (بنابه یگانگی شکل ساده شده) داریم

$$(n+\alpha)^n=u^\alpha \quad \text{و} \quad n^n=v^\alpha \qquad (۷)$$

اکنون اثبات قضیه ۱ را با لم‌های زیر ادامه می‌دهیم.

لم ۱: گیریم $a,b,r,s\in IN$ در تساوی $a^b=r^s$ صدق می‌کنند. فرض کنید $(b,s)=1$. در این صورت $a=t^s$ به ازای یک $t\in IN$.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر p عامل اولی از k با درجه‌ی تکرار k باشد (یعنی $p^k|a$ ولی $p^{k+1}|a$)، آن‌گاه $s|k$. چون درجه‌ی تکرار p در a^b مساوی kb است، پس $p^{kb}|r^s$ ولی $p^{kb+1}|r^s$. فرض کنید m درجه‌ی تکرار p در r است، یعنی $p^m|r$ ولی $p^{m+1}|r$. درجه‌ی تکرار p در r^s مساوی ms می‌باشد. از این رو kb=ms. چون $(b,s)=1$ پس s|k و لم ثابت می‌شود.

اکنون چون $(n,\alpha)=1$، با استفاده از لم ۱ (که دوبار در (۷) به کار گرفته می‌شود) نتیجه می‌شود

$$n=c^\alpha\ ,\quad n+\alpha=d^\alpha$$

که $c,d\in IN$. بنابراین $\alpha=d^\alpha-c^\alpha$.

لم ۲. اگر $c,d,\alpha\in IN$ و $d>c$ و $\alpha\geq 2$ آن‌گاه $\alpha<d^\alpha-c^\alpha$.

برهان. از استقراء روی α استفاده می‌کنیم:

$\alpha=2$:

$$d>c\Rightarrow d-c\geq 1$$

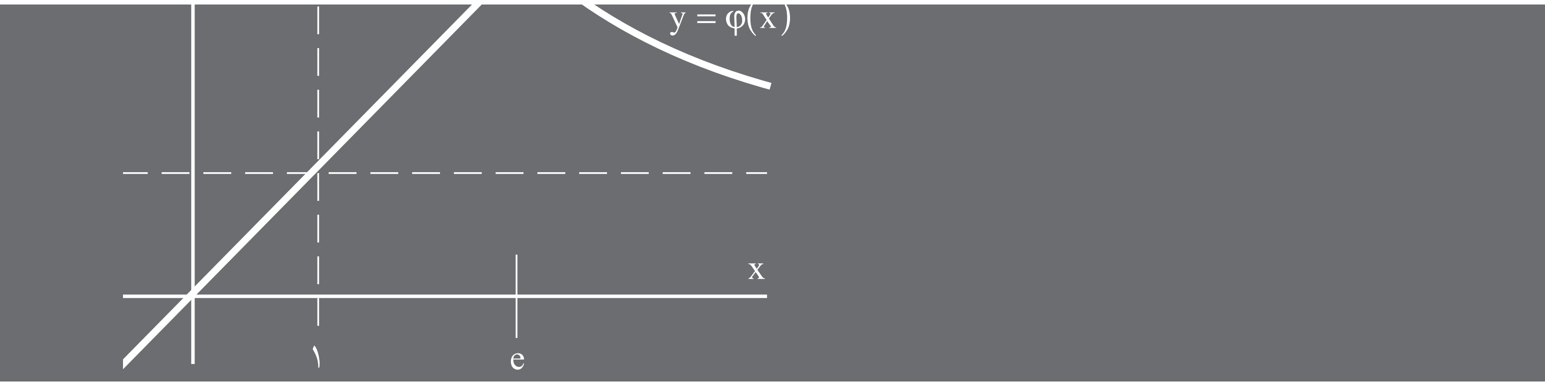
$$d+c\geq 3\Rightarrow d^2-c^2=(d-c)(d+c)\geq 1\times 3>2=\alpha$$

فرض کنید لم برای α برقرار است و آن را برای $\alpha+1$ ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned}d^{\alpha+1}-c^{\alpha+1}&=d.d^\alpha-c.c^\alpha\\&=d^\alpha-c^\alpha+\left((d-1)d^\alpha-(c-1)c^\alpha\right)\\&=(d^\alpha-c^\alpha)+\left((d-c).d^\alpha\right)+(c-1)(d^\alpha-c^\alpha)>\alpha+1+0\\&=\alpha+1\end{aligned}$$

(آخرین نامساوی بالا از فرض استقراء نتیجه می‌شود). بنابراین ثابت می‌شود که $d^{\alpha+1}-c^{\alpha+1}>\alpha+1$ و اثبات لم به پایان می‌رسد.

اکنون از لم ۲ نتیجه می‌شود که تساوی $\alpha=d^\alpha-c^\alpha$ که قبلاً به دست آوردیم نمی‌تواند برقرار باشد مگر این که $\alpha=1$ (و



در نتیجه $d = c + ۱$). بنابراین $h = \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{۱} = n$ و

$$x = (۱+\frac{۱}{h})^h = (۱+\frac{۱}{n})^n$$

$$y = (۱+\frac{۱}{n})^{n+۱}$$

و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه۱. p(e,e) نقطه‌ی منحصربه‌فرد مجموعه‌ی نقاط تجمع با مختصات گویا (=مجموعه‌ی جواب‌های گویا و نابدیهی $x^y = y^x$ ، $x,y > ۰$) روی نمودار $y = \varphi(x)$ است.

۴. اهمیت p(e,e) برای منحنی نمایش معادله‌ی $x^y = y^x$

با استفاده از بحث زیر دیده می‌شود که منحنی نمایش $x^y = y^x$ ، $x,y > ۰$ ، دارای دو شاخه است:

(i) خط y=x، $x > ۰$.

(ii) منحنی $y = \varphi(x)$ ، $x > ۱$.

این دو شاخه در p(e,e) تلاقی کنند. بنابراین p یک نقطه‌ی مضاعف برای این منحنی است. این مطلب را می‌توان با استفاده از نظریه‌ی کلی نقاط منفرد نیز بررسی کرد. منحنی نمایش $x^y = y^x$ ، $x,y > ۰$ ، یک منحنی تراز صفر از $F(x,y) = x^y - y^x$ است، یعنی معادله‌ی آن $F(x,y) = ۰$ است.

محاسبات ساده نشان می‌دهد که

$$F_x = yx^{y-۱} - y^x \ln y \Rightarrow F_x(e,e) = ۰$$

$$F_y = x^y \ln x - xy^{x-۱} \Rightarrow F_y(e,e) = ۰$$

بنابراین p یک نقطه‌ی منفرد منحنی است. طبیعت این انفراد (نقطه‌ی مطرود، نقطه‌ی تیز، نقطه‌ی دوگانه، یا نقطه‌ی نامعین) توسط علامت مبین آن در p تعیین می‌شود، یعنی

$$F_{xx}F_{yy} - F^۲_{xy}$$

(به‌عنوان مثال به [۳] صفحه ۸۴ مراجعه شود). داریم

$$F_{xx} = y(y-۱)x^{y-۲} - y^x(\ln y)^۲$$

پس

$$F_{xx}(e,e) = e(e-۱)e^{e-۲} - e^e.۱ = -e^{e-۱}$$

مشابهاً

$$F_{yy} = x^y(\ln x)^۲ - x(x-۱)y^{x-۲}$$

پس

$$F_{yy}(e,e) = e^e.۱ - e(e-۱)e^{e-۲} = e^{e-۱}$$

و

$$F_{xx}(p)F_{yy}(p) = -(e^{e-۱})^۲ < ۰$$

از این رو

$$\Delta_F(p) = -(e^{e-۱})^۲ - F^۲_{xy}(p) < ۰$$

بنابراین p یک نقطه‌ی مضاعف منحنی نمایش معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x,y > ۰$ ، است. شکل ۲ در بالا، این منحنی و نقطه‌ی مضاعف p(e,e) را نشان می‌دهد.

یادداشت. پس از پذیرفته شدن این مقاله، چهار مرجع دیگر [۸]–[۵] مورد توجه ما قرار گرفت (از وجود دوتای آن‌ها توسط آی. له‌من مطلع شدیم). در [۸] حل معادله‌ی (۱) در حیطه‌ی اعداد جبری سرشت نمایی شده است و [۵] شامل سرشت نمایی گویای معادله نظیر جواب‌های مقاله‌ی ما است. از نقطه‌نظر استدلالی، بحث جالبی درباره‌ی (۱) در مرجع [۷] ارائه شده است و در [۶] تعمیم‌هایی از (۱) مورد بحث قرار گرفته است.

مراجع

[1] R. C. Archibald; Problem Notes, No. 9. *Amer. Math. Monthly* 28 (1921), 141-143.

[2] Yehoshua Bar-Hillel, Y.N. Neman (Eds.); *Dapim Lematematika u'lephisika* (in Hebrew), Issue No. 6, Jerusalem (March 1943), p. 11, Problem 87 and its Solution in Issue No.7(June 1943), p.10.

[3] R. H. Fowler; *The Elementary Differential Geometry of Plane Curves*. *Cambridge University* Press, London, 2nd ed., 1929.

[4] E. J. Moulton: The Real Function Defined by $x^y = y^x$. *Amer. Math. Monthly* 23 (1916), 233-237.

[5] P. Hohler, P. Gebauer; Kann man ohne Rechner entscheiden, ob - e^π oder π^e grösser ist? *Elem. Math.*36 (1981), 131-134.

[6] R. A. Knoebel; Exponentials reiterated. *Amer. Math. Monthly* 88(1981), 235-252.

[7] I. Lehmann; Wie symmetrisch sind die sieben Grundrechenarten? *Mathematik in der Schule* 34 (1996) 344-356.

[8] D. Sato; Algebraic Solution of $x^y = y^x (۰ < x < y)$. Proc. *Amer. Math. Soc.* 31 (1972), 316.