اشاره

آن‌چه در ادامه می‌خوانید، گزارشی است از یکی از جلسات درس حسابان در یکی از دبیرستان‌های شهرستان کرج که برای درس آموزش ریاضی(۱) در نیم‌سال اول سال ۸۷-۸۶ در دانشگاه شهید بهشتی تهیه شده است.

گزارشی از یک کلاس درس

بهروز ورمزیار
دانشجوی کارشناسی ریاضی

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با‌عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ر یاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

روزی که به مدرسه رفتم گرچه دبیر کلاس، قبلاً موضوع را با معاون مدرسه در میان گذاشته بود به دفتر معاون رفتم و از ایشان به طور رسمی تقاضا کردم که اجازه‌ی حضور در کلاس را به من بدهد، که البته موافقت خود را در قالب تعارفات روزمره بیان کردند.

در دفتر مدرسه به چند تن از دبیران حاضر معرفی شدم، اتفاقاً در دفتر، دبیر ریاضی دیگری نیز بود که سؤالاتی پرسیدند و من پاسخ دادم، سپس دبیر کلاس، با ایشان در مورد برخی مسایل که قرار بود به بچه‌ها تدریس شود و نیز برخی سؤالات که بچه‌ها پرسیده بودند به مشورت پرداختند. یکی از سؤالاتی که برای من هم جالب بود، این بود که یکی از شاگردان از دبیر خود خواسته بود وارون تابع $f(x)=x^3+x$ را با روش‌های معمول یعنی پیدا کردن x برحسب y به‌دست آورد، و از آن‌جا که در مورد به‌دست آوردن ریشه‌های چند جمله‌ای درجه‌ی سوم برای بچه‌ها مطلبی گفته نشده بود، تصمیم گرفتند در فرصت مناسب روشی به‌جز آن برای پیدا کردن وارون این تابع بیابند.

در همین اثنا، زنگ شروع کلاس‌ها به صدادرآمد و من پس از خداحافظی از دبیران حاضر در دفتر و معاون، با اجازه‌ی دبیر کلاس، کمی زودتر در کلاس حاضر شدم و بعد از تقریباً یک دقیقه ایشان وارد کلاس شدند. با ورود من به کلاس هم‌همه‌ای به‌پا خاست و من سؤال و تعجب بزرگی که در ذهن بچه‌ها شکل گرفته بود را به‌خوبی حس می‌کردم. بالاخره یکی از شاگردان پرسید علت حضور من در کلاس چیست که پاسخ دادم برای کار تحقیقی در این کلاس حاضر شده‌ام. سپس نگاه‌ها از من به دبیر کلاس که به کلاس وارد می‌شد متوجه گردید.

بچه‌ها که تعدادشان ۲۴ الی ۲۶ نفر بود، در دو ستون از سه ستون میز و صندلی موجود در کلاس نشسته بودند، به‌طوری‌که وقتی دبیر رو به آن‌ها ایستاده بود، در سمت چپ ایشان قرار داشتند. علت هم معلوم بود، دبیر با دست راست می‌نوشتند و بدین‌ترتیب بچه‌ها می‌توانستند نسبت به آن‌چه نوشته می‌شود، دید بهتری داشته باشند.

من هم در انتهای ستون خالی از شاگردان نشستم تا اشراف بیش‌تری نسبت به کلاس داشته باشم.

دبیر کلاس، طبق شیوه‌ی معمول خود برای تسلط بر کلاس و ساکت کردن بچه‌ها، روی تابلویی که تازه پاک شدنش توسط یکی از شاگردان به پایان رسیده بود، شروع به نوشتن جمله‌ای با این مضمون کردند:

$x = ۱/۵ \quad \to \quad x^{۲}-۱ = ۱/۲۵$

$x = ۱/۴ \quad \to \quad x^{۲}-۱ = ۰/۸۶$

$x = ۱/۳ \quad \to \quad x^{۲}-۱ = ۰/۶۹$

$x = ۱/۲ \quad \to \quad x^{۲}-۱ = ۰/۴۴$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$۱^{+} \qquad\qquad ۰^{+}$

موضوع درس: حسابان، مبحث: حد و رفع ابهام

شروع درس

«گاهی در محاسبه‌ی حد، عبـاراتی به شکل $\frac{\overset{\text{حدی}}{۰}}{\underset{\text{حدی}}{۰}}$ ظاهـر می‌گردد که ابهام دارد و برای رفع ابهام، عامل مبهم کننده را از بین می‌بریم.»

ـ معلم برای توضیح آن‌چه گفته بود چنین آغاز کرد:

می‌دانیـم $\frac{\text{عدد}}{۰}$ بی‌معنی یـا تـعریـف نـشـده است، مـثلاً $\frac{۲}{۰}$ ، $\frac{۰}{۰}$ ، ...

یکی از دانش‌آموزان پرسید: چرا عدد تقسیم بر صفر بی‌معنی است؟

دبیر خطاب بـه دانـش‌آمـوز سؤالاتی پرسید کـه بـه قـرار زیر بودند:

معلم: مثلاً عـدد ۳ را در نظر بگیر و بگو معکوس یـا وارون آن چیست؟

دانش‌آموز: $\frac{۱}{۳}$.

معلم: در مورد ۵ یا $\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۴}{۵}$ چه می‌گویی؟

دانـش‌آمـوز: $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۵}{۴}$ (دبیـر، اعـداد را روی تـابـلـو نوشت).

معلم: حال بگو منظورت از این‌که می‌گویی مثلاً وارون $\frac{۳}{۲}$ برابر $\frac{۲}{۳}$ یا وارون $\frac{۴}{۵}$ برابر $\frac{۵}{۴}$ است چیست؟

دانش‌آموز: (با قدری مکث) نمی‌دانم.

معلم: به‌طور کلی در مـوضـوع بحث ما، منظـور از وارون یک عدد، عددی است کـه اگـر آن‌را در خـود عدد ضرب کنیـم حاصل‌ضرب ۱ شود و چنین نوشت:

$\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳}=۱$ ، $\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۴}=۱$ ، ...

معلم: (خطاب به دانش‌آموز) آیـا قـبـول داری صفر در هـر عددی ضرب شود حاصل صفر است؟ (و استاد زیر کلمه‌ی هر خط کشید).

دانش‌آموز: بلی.

معلم: حال بگو چه عددی است که در صفر ضرب شود، حاصل ۱ است؟

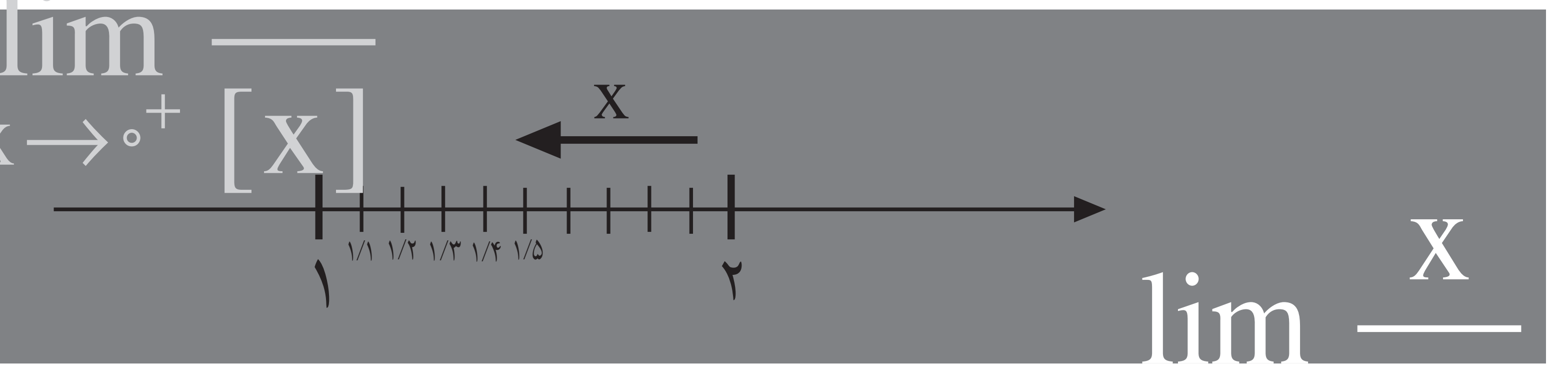
دانش‌آموز: (در حالی‌که به دست معلم که به کلمه‌ی «هر» اشاره داشت نگاه می‌کرد گفت) هر عددی در صفر ضرب شود حاصل صفر است (و مکث کرد).

دبیر اضافه کرد: پس هیچ عددی نیست که در صفر ضـرب شود و حاصل ۱ شود، یعنی وارون صفر که با نماد $\frac{۱}{۰}$ نشان داده می‌شود وجود ندارد، پس

بی‌معنی ← (چیزی که عدد وجود ندارد) $\frac{۱}{۰}\times\text{عدد} = \frac{\text{عدد}}{۰}$

پس نـوشتن عبـاراتی به‌شکـل $\frac{۳}{۰}$ یا $\frac{-۱}{۰}$ یـا $\frac{۰}{۰}$ و نظایر آن‌هـا جایز نیست.

البته همه می‌دانیم که استدلال معلم بـر اساس تـعاریـف و قضایایی است که در مورد میدان داریم:



● اگر R حلقه‌ی یک‌داری باشد که $R \neq \{0\}$ در این صورت $1_R \neq 0_R$ ؛

● اگر R حلقه باشد، $a.0_R = 0_R.a = 0_R$

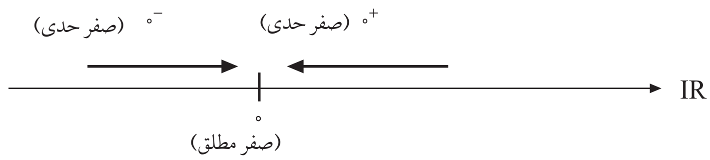
● هر میدان، حلقه‌ی یک‌دار تعویض‌پذیری است که مقسوم‌علیه صفر ندارد.

استاد در ادامه‌ی صحبت‌های خود در مورد $\frac{0}{0}$ اضافه کرد:

در حد عباراتی به شکل $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ مبهم است نه بی‌معنی.

صفر حدی چیست؟

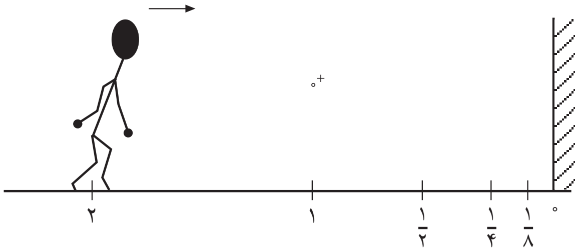
معلم در رابطه با توضیح صفر حدی نمودار زیر را رسم کرد:



ـ «صفر حدی عبارتی است که به صفر نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه خود صفر نمی‌شود.
قرارداد می‌کنیم اگر عبارت مورد نظر از سمت راست به صفر نزدیک شد با علامت 0^+ و اگر از سمت چپ به صفر نزدیک شد با علامت 0^- نشانش دهیم.»

معلم به بیان تمثیلی برای این موضوع پرداخت:

فرض کنید در ۲ متری دیواری ایستاده‌اید، سپس با سرعت ۱ متر بر ثانیه به دیوار نزدیک می‌شوید. بعد از گذشت اولین ثانیه، سرعت شما نصف می‌شود، یعنی در حالی که در فاصله‌ی ۱ متری دیوار هستید، با سرعت $\frac{1}{2}$ متر بر ثانیه به آن نزدیک می‌شوید. با گذشت دومین ثانیه، در حالی که در فاصله‌ی $\frac{1}{2}$ متری دیوار هستید سرعت شما دوباره نصف می‌شود؛ یعنی $\frac{1}{4}$ متر برثانیه و به‌همین ترتیب شما هر ثانیه به دیوار نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوید ولی به‌دیوار نمی‌رسید. (دبیر آنچه گفته شد را ننوشت بلکه بر روی شکل زیر توضیح داد)

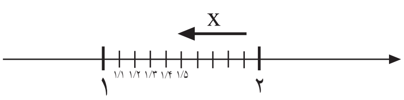


معلم با آگاهی از این نکته که $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 2$ با شوخی گفت این بی‌نوا باید تا ابد زنده بماند تا به دیوار برسد!

بعد از چند دقیقه که بحث و پرسش‌های بچه‌ها در این رابطه خاتمه یافت، معلم مثال دیگری آورد:

عبارت $x^2 - 1$ را در نظر بگیریم و ببینیم وقتی که x به ۱ ازچپ و راست میل می‌کند، چه رفتاری دارد.

وقتی x از راست به ۱ میل می‌کند: $x \rightarrow 1^+$



$x = ۱/۵ \rightarrow x^2 - ۱ = ۱/۲۵$

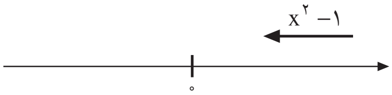
$x = ۱/۴ \rightarrow x^2 - ۱ = ۰/۸۶$

$x = ۱/۳ \rightarrow x^2 - ۱ = ۰/۶۹$

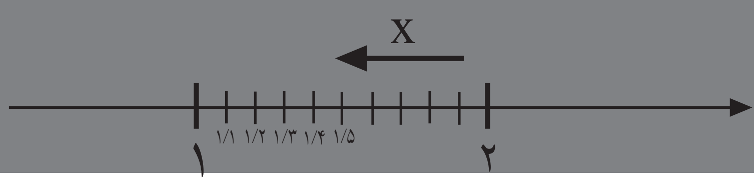
$x = ۱/۲ \rightarrow x^2 - ۱ = ۰/۴۴$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1^+ \qquad 0^+$

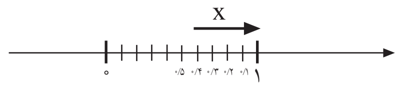


$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{x}{[x]}$$

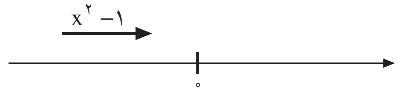


وقتی x از سمت چپ به ۱ میل می‌کند:

$x \to ۱^-$



$$x = ۰/۵ \to x^۲ - ۱ = -۰/۷۵$$
$$x = ۰/۶ \to x^۲ - ۱ = -۰/۶۴$$
$$x = ۰/۷ \to x^۲ - ۱ = -۰/۴۹$$
$$x = ۰/۸ \to x^۲ - ۱ = -۰/۳۶$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$۱^- \qquad\qquad ۰^-$$



یکی از دانش‌آموزان پرسید: آیا همیشه وقتی x از سمت راست به یک عدد نزدیک می‌شود عبارت از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود و به همین ترتیب از چپ؟

معلم پاسخ داد: اگر در مثال بالا، عبارت $۱ - x^۲$ را در نظر بگیریم

$$x \to ۱^+ \longrightarrow ۱ - x^۲ \to ۰^-$$

و

$$x \to ۱^- \longrightarrow ۱ - x^۲ \to ۰^+$$

یا حتی گاهی به این‌که x از کدام طرف به عدد نزدیک شود بستگی ندارد. مثلاً عبارت زیر

$$(x-۱)^۲ \text{ یا } (۱-x)^۲$$

$$x \to ۱^+ \longrightarrow (x-۱)^۲ \to ۰^+$$
$$x \to ۱^- \longrightarrow (x-۱)^۲ \to ۰^+$$

سپس معلم گفت در مطالب گذشته از این واقعیت استفاده کردیم که $\frac{۰_{\text{حدی}}}{\text{عدد}} = ۰$ ولی آن‌را به صورت $\frac{۰}{\text{عدد}} = ۰$ می‌نوشتیم،

مثلاً $\lim \frac{x^۲-۱}{x+۵} = \frac{۰}{۶} = ۰$. در حالی که اکنون می‌دانیم صورت کسر، صفر (مطلق) نیست، بلکه به بیان غیر ریاضی، عددی بسیار بسیار کوچک است که پس از تقسیم، حاصل کسر بسیار بسیار کوچک و در حد صفر می‌شود.

از این پس نیز همین رویه را در پیش می‌گیریم. یعنی ابتدا عددی که x به آن میل می‌کند را در عبارتی که می‌خواهیم از آن حد بگیریم قرار می‌دهیم. اگر حاصل به‌صورت $\frac{۰}{\text{عدد}}$ درآمد طبق آن‌چه قبلاً داشتیم جواب حد صفر است. ولی اگر حاصل به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ (البته منظور $\frac{۰_{\text{حدی}}}{۰_{\text{حدی}}}$ است، قبل از این گفتیم که $\frac{۰}{۰}$ بی‌معنی است) درآمد، می‌گوییم **ابهام** دارد یا **مبهم** است.

معلم دسته‌بندی زیر را از آن‌چه تاکنون گفته شده بود و یا قرار بود گفته شود انجام داد:

$$\frac{۰_{\text{مطلق}}}{۰_{\text{حدی}}} = ۰$$

جلوتر توضیح می‌دهیم $\lim_{x \to ۰^+} \frac{[x]}{x} = ۰$

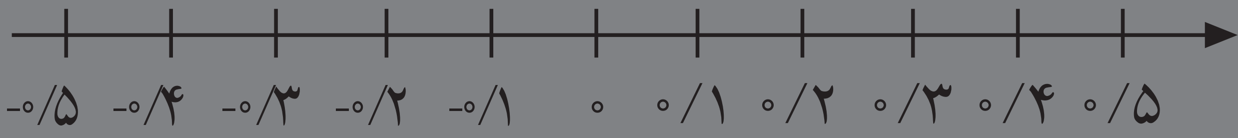
مبهم $\frac{۰_{\text{حدی}}}{۰_{\text{حدی}}}$: رفع ابهام

$$\frac{\text{عدد} \neq \text{صفرمطلق}}{۰_{\text{حدی}}} \to \infty$$

بعداً گفته خواهد شد $\lim_{x \to ۰^-} \frac{[x]}{x} = +\infty$

قبلاً در این مورد بحث شده : $\lim_{x \to ۰} \frac{x}{x+۵} = \frac{۰}{۵} = ۰$

$$\frac{۰_{\text{حدی}}}{\text{عدد}} = ۰$$



$$= \lim_{x \to ۰} x + ۱ = ۰ + ۱ = ۰$$

$$\frac{\text{مطلق } ۰}{\text{حدی } ۰}$$

در حدگیری به چنین حالتی برخورد نمی‌کنید چون اصلاً x در دامنه‌ی عبارتی که از آن می‌خواهیم حدبگیریم قرار ندارد. البته بعداً بیش‌تر توضیح خواهیم داد: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{x}{[x]}$

و نیز داریم: $\frac{\text{عدد}}{۰}$ یا $\frac{۰}{۰}$ بی‌معنی

و $۰ = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}}$: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{[x]}{x+۵} = ۰$

ابهام چیست و چگونه رفع ابهام کنیم؟

معلم از بچه‌ها پرسید مبهم یعنی چه؟

بچه‌ها که معلوم بود مفهوم مبهم را می‌دانند ولی نمی‌توانند معنی آن را به‌درستی بیان کنند، هریک چیزی گفتند. معلم اضافه کرد همان‌طور که گفتید مبهم چیزی است که تصور درستی از آن نداریم. علت این‌که ما در حد، به عباراتی به شکل $\frac{۰}{۰}$ مبهم می‌گوییم را در مثال‌های زیر ببینید:

$$\frac{۰/۱}{۰/۲}, \frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}, \frac{۰/۰۰۱}{۰/۰۰۲}, \frac{۰/۰۰۰۱}{۰/۰۰۰۲}, \dots \to \frac{\text{حدی } ۰}{\text{حدی } ۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$* \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{۰/۵^۲+۰/۵}{۰/۵}, & \frac{۰/۴^۲+۰/۴}{۰/۴}, & \frac{۰/۳^۲+۰/۳}{۰/۳}, & \frac{۰/۲^۲+۰/۲}{۰/۲}, & \dots \to \frac{\text{حدی } ۰}{\text{حدی } ۰} = ? \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۱+۰/۵ & ۱+۰/۴ & ۱+۰/۳ & ۱+۰/۲ & \dots \to ۱+۰=۱ \end{array} \right.$$

همان‌طور که می‌بینید صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کنند ولی حاصل کسر عددی است ثابت. همیشه نمی‌توانیم به این راحتی حاصل $\frac{\text{حدی } ۰}{\text{حدی } ۰}$ را پیدا کنیم. یعنی نمی‌دانیم در حد چه نسبتی بین صورت و مخرج وجود دارد و به این دلیل به این عبارات مبهم می‌گوییم. البته برای رفع این مشکل، راه‌های بسیاری وجود دارد، از جمله فاکتور گرفتن، استفاده از اتحادهای جبری یا مثلثاتی، گویا کردن کسرها و... (البته برخی از این راه‌ها توسط خود دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شد)

مثال: $\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + x}{x} \to \frac{۰}{۰}$ مبهم

طبق رویه‌ی گذشته، صفر را در صورت و مخرج کسر قرار می‌دهیم و متوجه هستیم منظورمان $\frac{\text{حدی } ۰}{\text{حدی } ۰}$ است.

حال به رفع ابهام می‌پردازیم.

ابتدا باید عامل مبهم‌کننده را بشناسیم، برای پیدا کردن عامل مبهم‌کننده، توجه کنیم که x به چه عددی نزدیک می‌شود، در این صورت تفاضل x و آن عدد، عامل مبهم‌کننده است و باید آن را از صورت و مخرج حذف کنیم. در این مثال $x - ۰$ یا همان x، عامل مبهم‌کننده است. لذا با فاکتور گیری x از صورت کسر داریم

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + x}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{\cancel{x}(x+۱)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to ۰} x + ۱ = ۰ + ۱ = ۰$$

(به * توجه کنید.)

مثال دیگر: (الف $\lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{x - ۴}$

معلم از بچه‌ها خواست راهی برای رفع ابهام حد بالا پیشنهاد کنند. بچه‌ها ابتدا ۴ را در صورت و مخرج قرار دادند تا از مبهم بودن حد اطمینان حاصل کنند.

معدودی از بچه‌ها که قبلاً با چنین حدودی سروکار داشتند، گفتند کسر را در مزدوج صورت ضرب کنیم.

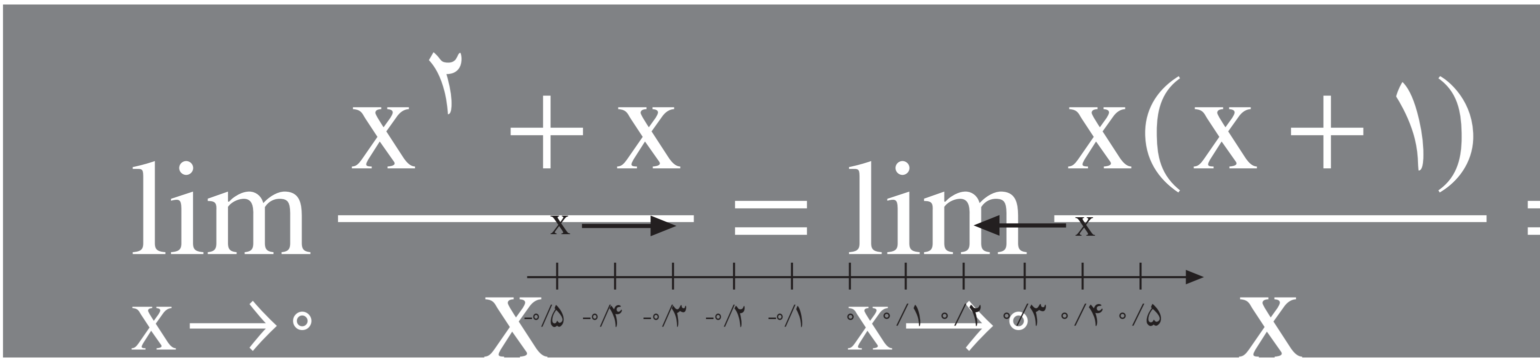
$$\lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{x - ۴} \times \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} + ۲} = \lim_{x \to ۴} \frac{\cancel{(x - ۴)}}{\cancel{(x - ۴)}(\sqrt{x} + ۲)}$$

$$= \lim_{x \to ۴} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۲} = \frac{۱}{۲ + ۲} = \frac{۱}{۴}$$

معلم در مورد حد زیر نیز از بچه‌ها پیشنهاد خواست

(ب $\lim_{x \to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۲}{x - ۸}$

اکثر بچه‌ها پس از این‌که ۸ را در صورت و مخرج قرار دادند اعلام کردند کسر را در مزدوج صورت ضرب کنیم. معلم گفت ولی انجام این کار باعث از بین رفتن ریشه‌ی سوم x



نمی‌شود یعنی عامل مبهم‌کننده که $x-8$ است در صورت ظاهر نمی‌گردد.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{(\sqrt[3]{x}+2)(x-8)}$$

باید دنبال راه دیگری باشید و اتحاد چاق‌ولاغر را پیشنهاد کرد و سپس یکی از بچه‌ها پای تابلو آن‌را حل کرد.

از آن‌جا که بعد از ساده کردن الف و ب به‌صورت

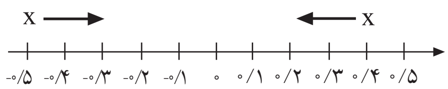
$$\lim_{x\to8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+8+2\sqrt[3]{x}}\ ,\quad \lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

درآمده بودند یکی از بچه‌ها پرسید آیا همیشه ۱ در صورت قرار می‌گیرد؟ معلم پاسخ داد اگر مثال الف را برعکس در نظر بگیری یعنی $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ متوجه خواهد شد که چنین نیست و دانش‌آموز متوجه اشتباه خود شد.

مثال‌های بعدی:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{[x]}{x}\ ,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{[x]}{x}$$

بچه‌ها در مورد حد اول دچار اشتباه شدند و گفتند نیاز به رفع ابهام دارد ولی با توضیح معلم متوجه اشتباه خود شدند. وی برای توضیح مطلب از نمودار زیر استفاده کرد.



وقتی $x\to0^+$:

$$x=0/5 \to \frac{[0/5]}{0/5}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0/5}=0$$
$$x=0/4 \to \frac{[0/4]}{0/4}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0/4}=0$$
$$x=0/3 \to \frac{[0/3]}{0/3}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0/3}=0$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$0^+ \qquad\qquad 0=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0_{\text{حدی}}}$$

بچه‌ها به پیروی از همین روش در مورد حد دوم به عبارت $\lim_{x\to0^-}\frac{[x]}{x}=\frac{-1}{0^-}$ رسیدند، ولی نتوانستند جواب نهایی را بیابند.

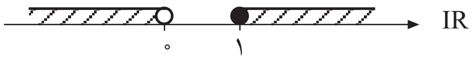
استاد گفت فعلاً بپذیرید که جواب $+\infty$ است، مثبت به این لحاظ که صورت و مخرج هم‌علامت هستند و بی‌نهایت از این‌رو که صورت کسر عددی ثابت است و مخرج آن کوچک و کوچک‌تر می‌شود پس کسر بزرگ و بزرگ‌تر می‌گردد.

البته بعداً در مورد این حدود، بیش‌تر خواهیم گفت.

مثال: $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{[x]}$, $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{[x]}$

در مورد حد اول بچه‌ها بلافاصله طبق روش بالا نتیجه گرفتند $\frac{0}{-1}=0$ و مشکلی نبود. ولی در مورد دومی، مردد باقی ماندند چون به‌عبارت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{مطلق}}}$ رسیده بودند.

معلم گفت اگر دامنه‌ی $\frac{x}{[x]}$ را پیدا کنیم متوجه می‌شویم اصلاً x نمی‌تواند از سمت راست به صفر نزدیک شود، لذا مجاز به حدگیری نیستیم. دامنه‌ی $\frac{x}{[x]}$، در شکل زیر نشان داده شده است.



مثال: $\lim_{x\to0}\frac{2x^3+5}{\sqrt{x+2}}$

در این مثال عده‌ای به گویا کردن کسر پرداختند. عده‌ای ابتدا صفر را در صورت و مخرج کسر قرار دادند و گفتند چرا مبهم نیست؟ عده‌ای با تردید گفتند جواب $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است.

در انتها معلم به توضیح مطلب پرداخت و گفت قرار نیست همه‌ی موارد مبهم باشد. پس دقت کنید! سعی کنید ابتدا عددی که x به آن میل می‌کند را در عبارت قرار دهید و بعد تصمیم بگیرید چه کنید.

این آخرین مثالی بود که زده شد؛ درحالی‌که دقایقی پیش (حدود ۱۰ دقیقه) زنگ به‌صدا درآمده بود. ولی چون زنگ آخر بود، بچه‌ها در کلاس مانده بودند!