

چرا تدریس ریاضی دشوار است؟

تذکراتی از جانب هارولد بروکمن

ترجمه: مجید قاسمی
دبیر ریاضی شهرستان آمل

تذکره ۰:

پسر، مساوی است با دو دختر؛

یا

پسرها، دو برابر دخترها هستند؛

یا

پسرها، دو ضرب در دخترها هستند؛

یا معکوس این‌ها.

حالا این مطلب به ما چه می‌گوید؟ می‌توان دریافت که حروف B و G در ذهن این افراد، مشخصاً با اعداد متناظر نیست. اگر چنین بود، می‌بایست با چنین ترجمه‌ای مواجه می‌شدیم:

تعداد پسران، دو برابر تعداد دختران است؛

یا چیزی شبیه به آن.

و در این جا، مسأله‌ی مهمی نهفته است:

نمادهایی که در عبارات‌های جبری استفاده می‌شوند، مشخصاً نه به عنوان اعداد، بلکه به مثابه اشیاء فهمیده می‌شوند.

تذکره ۱:

گاهی اوقات، به دانش‌آموزان حرف‌هایی از این دست گفته می‌شود که «ریاضی، نقش مهمی در زندگی روزانه‌ی ما دارد.» قبول چنین حرف‌هایی بسیار دشوار است و برای هر کسی که آن را می‌شنود یا می‌خواند، چالشی ایجاد می‌شود: برای من ایمیل بفرستید! و درباره‌ی آخرین باری که ریاضی را در «زندگی روزانه»تان به کار گرفتید- حتی برای کاری نه چندان مهم- بنویسید. به زودی نتایج آن را در منزلگاه خود گزارش خواهم داد.

تذکره ۱:

آنچه در ادامه می‌آید، مثالی کلاسیک از یک موضوع است. دقیقاً خود آن چه که این، مثالی از آن است، می‌تواند موضوع یک بحث جالب باشد.

این سؤال را از گروه بزرگی از افرادی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، پرسید:

با استفاده از حروف B و G ، جمله‌ی زیر را با یک عبارت

جبری بنویسید: «در این کلاس، تعداد پسران، دو برابر

تعداد دختران است.»

خواهید دید که بیش از نیمی از افراد «تحصیل کرده»، پاسخ نادرست می‌دهند.

بدون هیچ اظهارنظری، فقط پاسخ‌های آن‌ها را بنویسید. حال از آن‌ها بخواهید تا معادله‌ای را که نوشته‌اند، تا حد امکان کلمه به کلمه ترجمه کنند. خواهید دید که ترجمه، دقیقاً مطابق با اطلاعات اصلی نیست. معادله‌ای که آن‌ها می‌نویسند به احتمال زیاد $B = 2G$ یا $G = 2B$ است. اما معمولاً می‌گویند:

یکی از نتایج منطقی تذکر اول این است که چون نمادهای جبری به عنوان اعداد فهمیده نمی‌شوند، عملگرهای محذوف در واقع حذف نشده‌اند و عبارت جبری $2B$ ، معنی «۲ پسر» را با خود حمل می‌کند. این، یک مفهوم عددی نیست، بلکه یک مفهوم فیزیکی است. این ایده که B در $2B$ ، نمایانگر عدد است، در تقابل با «پسران» گم شده است. در واقع در این جا، هیچ عمل ضربی وجود ندارد. شاید بهتر باشد بگذاریم علامت ضرب در این جا باقی بماند.

تذکر ۳:

این مسأله با جزئیات بیش تر و رسمی تر، در مقالات زیر، تشریح شده است:

<http://www.ed.gov/databases/ERTC-Digests/ed313192.html>

<http://www-sci.uni-klu.ac.at/~gossimit/pap/misconvar.html>

حال در این جا، یک نکته ی جالب وجود دارد. آزمایش خود را با افراد مختلف تکرار کنید، اما این بار این پرسش را مطرح کنید: با استفاده از حروف T و S، جمله ی زیر را با عبارت های جبری توصیف کنید: «این مدرسه، دو برابر تعداد معلمی که دارد، دانش آموز دارد.»

این بار نیز حاضرم شرط ببندم که بخش اعظم پاسخ ها، نادرست خواهند بود، اما نه به میزان دفعه ی قبل.

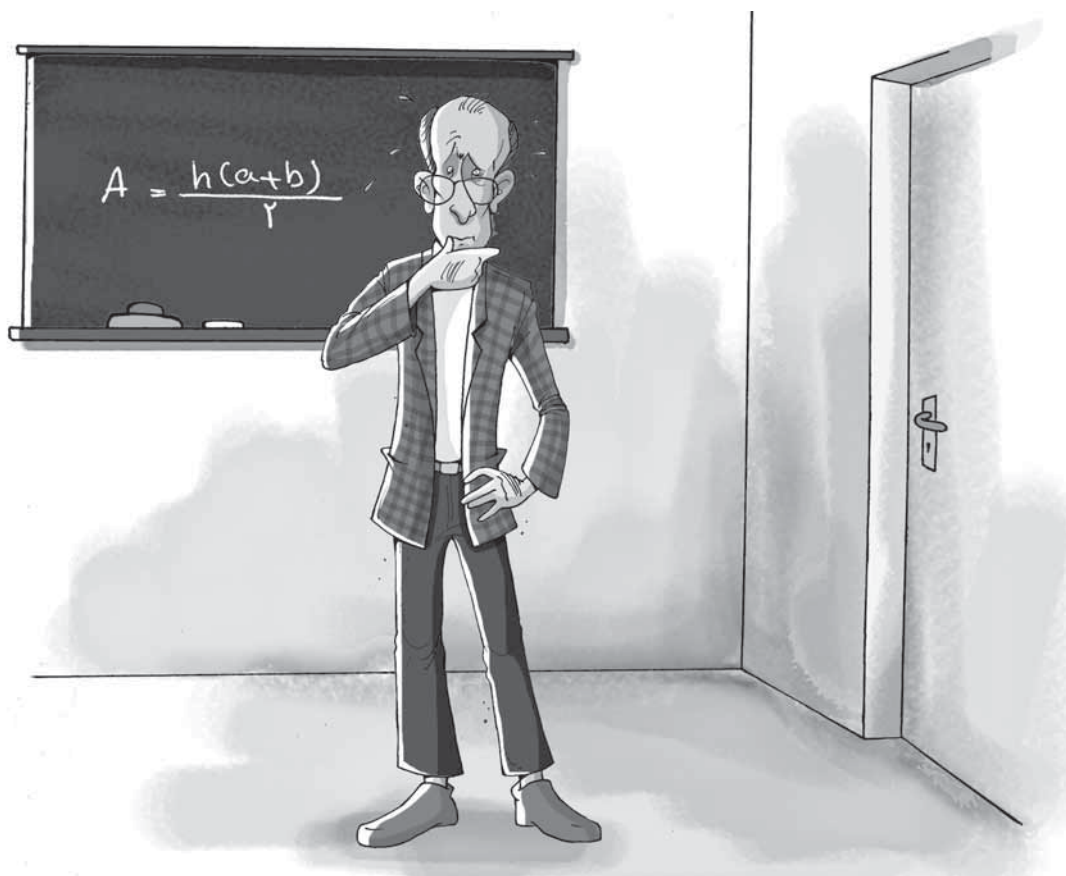
تذکر ۴:

فرض کنید، عکس مسأله های بالا را برای شخصی مطرح کنیم: عبارت جبری $G = 2B$ را به یک جمله ی (انگلیسی) روان ترجمه کنید.^۲

آیا پاسخ دهنده، جوابی روشن خواهد داد که در آن، به طور عینی واضح باشد که او B و G را به مثابه اعداد می بیند؟ من تردید دارم. احساس می کنم که افراد زیادی به چیزی که هم اکنون گفته ام، واکنشی مانند واکنش زیر نشان خواهند داد:

خوب، که چی؟ من می دانم که B و G و T و S، معرف اعداد هستند نه اشیا. فقط به این دلیل که من این موضوع را به وضوح بیان نکرده ام، به این معنی نیست که آن را نمی فهمم.

به گمان من، دلیل آن این است که این بار، امکان بررسی مجدد جواب، وجود دارد. در آزمایش اول، راهی برای این که بدانیم آیا در کلاس، تعداد پسران از تعداد دختران بیش تر هست یا خیر، نداشتیم. بنابراین هیچ تلاشی برای مقایسه ی عبارت جبری پیشنهادی با واقعیت، صورت نمی گرفت. اما در این جا، عاقلانه است که فرض کنیم تعداد دانش آموزان از تعداد معلمان بیش تر است. به همین دلیل، بعضی از افراد تأکید می کنم، بعضی از افراد این زحمت را به خود می دهند که عبارت جبری خود را در برابر آن چه که آن را از نظر منطقی درست می دانند، مورد بررسی قرار دهند.



اما من با این حرف مخالفم زیرا به کارگیری نادقیق زبان در ارتباطات عادی، اغلب منجر به سوء برداشت می‌شود. ریاضیات هم یک زبان است و متأسفانه، استفاده‌ی نادقیق از واژگان گمراه‌کننده، ناسازگار و گاهی نادرست در ریاضیات مدرسه‌ای کاملاً مرسوم می‌باشد و این، حداقل بخشی از دلایل وجود مشکلات زیای است که در یادگیری ریاضیات وجود دارد. باید پرسید که مزیت بی‌دقتی در استفاده از واژگان در حوزه‌ای که فرض بر این است که دقیق‌ترین موضوع درسی مدرسه‌ای است، چیست؟

تذکره ۵:

عنوان این مقاله، این است که چرا تدریس ریاضی این قدر دشوار است. وقتی در سال‌های اول دبیرستان [یا اواخر دوره‌ی راهنمایی] تدریس می‌کردم، متوجه شدم که آدم‌های مختلفی برای تدریس ریاضیات انتخاب شده بودند. حتی در میان آن‌ها کسانی بودند که معلوم بود برای این کار، آمادگی ندارند. فکر می‌کنم تصویری مشترک بین مدیران وجود داشت که احتمالاً ریاضیات ساده‌ترین موضوع برای تدریس است. فراموش نکنید که مادر باره‌ی پایه‌های هفتم تا دهم مدرسه صحبت می‌کنیم. همه‌کس می‌تواند آن را تدریس کند. [اما] ممکن است دوستش نداشته باشند. عنوان این مقاله نشان می‌دهد که این نگرش در حال تغییر است.

از سوی دیگر، احساس می‌کنم از منظر والدین و دانش‌آموزان، ریاضیات موضوعی است که یادگیری آن دشوار است نه تدریس آن. می‌دانم که وقتی در مکالمات غیر رسمی با مردم، به آن‌ها می‌گویم که سابقاً ریاضی تدریس می‌کردم، اغلب در پاسخ می‌گویند «من هرگز ریاضی ام خوب نبوده است» یا عباراتی نظیر این را بیان می‌کنند.

اگر کسی بخواهد درباره‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی با هدف مشخص کردن نگرش آن‌ها نسبت به موضوعات مختلف مدرسه‌ای، تحقیقی انجام دهد، احتمالاً متوجه می‌شود که «بهره‌ی رضایت» از ریاضیات، نسبتاً کم است. هم‌چنین این نکته را درک خواهد کرد که تعدادی تناسبی از دانش‌آموزان که در درس‌های دیگر، خوب عمل می‌کنند، با ریاضیات مشکل دارند. نیز دانش‌آموزان زیادی به ریاضیات، نه به عنوان یک درس جالب یا مفید، بلکه به عنوان یک مشکل بزرگ نگاه می‌کنند که باید آن را تحمل کرد. در عین حال، همه‌ی آن‌ها می‌دانند که ریاضیات یک «درس بسیار مهم» است.

من خودم کاملاً مطمئن نیستم که چرا ریاضیات، این قدر مهم

است. شاید چون با تفکر منطقی سروکار دارد. ریاضی ورزشی به شما می‌آموزد که منطقی فکر کنید. چیزی شبیه به این. و البته این حرف، کاملاً بی‌معنی است؛ اما مطمئناً بعضی مردم این طور فکر می‌کردند. تصور می‌کنم هنوز هم بعضی‌ها چنین عقیده‌ای دارند. به نظر می‌رسد مشکلاتی وجود دارد. فکر می‌کنم یکی از مشکلات با این واقعیت ارتباط دارد که ریاضیات مدرسه‌ای، واقعاً درباره‌ی فهم و درک نیست بلکه در مورد مهارت‌ها است. خواهش می‌کنم متوجه این نکته باشید که من، درباره‌ی واقعیت‌های کلاس درس صحبت می‌کنم؛ نه درباره‌ی چیزی که باید وجود داشته باشد. مهارت را برحسب قدرت پاسخ‌گویی درست به نوع خاصی از «مسأله» تعریف می‌کنند.

آن‌چه که برای این مهارت لازم است، نوعی دست‌ورزی با نمادهای جبری است؛ مانند ساده کردن کسرهای پیچیده و امثالهم. اما توانایی انجام کاری به معنای فهم و درک آن کار نیست. علاوه بر این، فهم هر چیز دارای مراتب مختلفی است که اغلب شامل بعضی از استعاره‌ها یا چیزهای دیگر است. اگرچه از این اصطلاح، به کرات در جمع‌های آموزشی و نیز توسط والدین و دانش‌آموزان، استفاده می‌شود، لیکن حتی نشانی از توافق درباره‌ی معنای فهم و درک بین معلمان وجود ندارد. به عنوان مثال، ممکن است سؤال شود که آیا فهم استعاره‌ای، همان فهم واقعی است؟ اغلب اوقات، همان درک استعاره‌ای است که فهمیده می‌شود: چندین استعاره‌ی معتبر وابسته به شرایط؛ چندین راه معتبر فهمیدن. غیر از این است؟ این نکته عموماً مورد پذیرش است که تدریس متکی بر فهم و درک، از تدریس مهارت‌ها دشوارتر است. هم‌چنین تعداد کمی از معلمان می‌دانند یا حتی ادعا می‌کنند که می‌دانند امتحان فهم و درک-محور، به یک شیوه‌ی عملی در محیط مدرسه، چگونه باید باشد. این بدان معناست که آن معلمان، به جای آن‌که دانش‌آموزان را برای امتحان آماده کنند، سعی می‌کنند در آن‌ها فهم و درک نسبت به موضوع را ایجاد کنند. چنین معلمانی ایمن هستند زیرا هیچ راهی وجود ندارد که براساس آن بتوان مشخص کرد که آیا آن‌ها به اهداف آموزشی مورد نظر رسیده‌اند یا خیر. به عبارت دیگر، هیچ راهی برای پاسخ‌گویی وجود ندارد. اگر کسی در این نکته مخالف است، خوشحال خواهیم شد که نظر او را بشنوم.

بنابراین، در کلاس‌های ریاضی مدارس، اغلب فعالیت‌های معطوف به ایجاد مهارت از راه تکالیف تمرینی بسیار زیاد است. همان چیزی که به آن drill می‌گویند. دلیل این‌که این‌ها مهم هستند و با موضوع مورد بحث، ارتباط دارند، این است که تنها از طریق

فهم و درک شخصی است که بینشی که لازمه‌ی یادگیری شخص است، می‌تواند از طریق خود شخص حاصل شود.

تذکره ۶:

من فکر می‌کنم که میان ریاضی و ریاضی مدرسه‌ای، تمایز وجود دارد. بحث درباره‌ی این موضوع، فضای زیادی می‌خواهد و در این جا، تنها می‌توان چند اشاره‌ی ابتدایی به آن کرد. در کارگاه تعمیر اتومبیل در مدرسه، دانش‌آموزان، ماشین‌ها را تعمیر می‌کنند و این، با کاری که در سایر تعمیرگاه‌های واقعی ماشین اتفاق می‌افتد، خیلی تفاوت ندارد.

در کلاس‌های فیزیک، دانش‌آموزان به روش تجربی (از طریق آزمایش)، خاصیت‌های فیزیکی اشیاء و نیز خاصیت‌های مکانیکی سیستم‌های دینامیکی را تعیین می‌کنند. کاری که ضرورتاً با فعالیت‌های فیزیک‌دان‌های واقعی، متفاوت نیست.

در کلاس‌های ادبیات انگلیسی، دانش‌آموزان درباره‌ی غنای آثار ادبی بحث می‌کنند و با نوشتن، عقاید و نظرات خود را بیان می‌کنند که چندان با فعالیت‌های منتقدان و مؤلفان، تفاوتی ندارد. اما آن‌چه در کلاس‌های ریاضی اتفاق می‌افتد، عملاً هیچ شباهتی به فعالیت‌های ریاضی‌دان‌ها در دنیای واقعی، ندارد.

تذکره ۷:

یکی دیگر از مشکلات مربوط به ریاضیات مدرسه‌ای این است که برای دانش‌آموزان روشن نیست که چگونه آن‌چه که آن‌ها [در مدرسه] انجام می‌دهند، «با طرح‌واره‌ای که از اشیاء در ذهن دارند، جور درمی‌آید؟» به نظر می‌رسد فرصت کمی داریم که برگردیم و به آن‌چه که قصد داریم انجام دهیم، آن‌چه که انجام داده‌ایم، مقصدی که پیش رو داریم و چرایی انجام آن‌ها، نگاهی کلی و اجمالی بیندازیم. جنگل را نمی‌توان دید زیرا درختان زیادی در آن جا وجود دارد. به نظر می‌رسد ریاضی مدرسه‌ای، مجموعه‌ی بی‌پایان موضوعاتی است که هیچ ارتباط روشنی بین آن‌ها وجود ندارد. البته معلم ریاضی می‌تواند به سادگی لزوم هریک از آن‌ها را با این که هریک، در واقع پیش‌نیاز انجام یا «فهمیدن» موضوع بعدی است، توجیه کند. همه‌ی این‌ها را می‌توان پذیرفت؛ اما من واقعاً باور نمی‌کنم که دانش‌آموزان چنین تصویر گسترده‌ای از ریاضی داشته باشند و به همین دلیل، این فعالیت‌ها در نظر آن‌ها مجموعه‌ای از فعالیت‌های منفرد و طوطی‌وار خواهد بود. زمانی که همه‌ی این فعالیت‌ها گفته و انجام داده شوند، [دانش‌آموز] به کجا خواهد

رسید؟ چه توجیهی برای دانش‌آموزان خواهد شد؟ «سپس شما خواهید توانست از ریاضیات برای حل مسایل استفاده کنید». قبول. اما چه نوع مسأله‌ای؟ خوب! در پایان هر فصل از درس، مثال‌هایی ارائه می‌شود. مثلاً چیزی شبیه به محاسبه‌ی طول نرده‌های مزرعه‌ی یک کشاورز. مثال زیر، نمونه‌ی خوبی است:

اگر «بیل» یک پرتقال بیش‌تر از «پیتر» داشته باشد و «پیتر» و «بیل» روی هم ۵ پرتقال داشته باشند، «بیل» چند پرتقال دارد؟ آیا این، آن چیزی است که موضوع ریاضیات است؟ چند مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد که آن قدر مهم به نظر می‌رسند که توجه همه را به خود جلب کنند؟ تعداد آن‌ها خیلی زیاد نیست؛ و دلیل آن این است که برای تمرین روی «مبحث نظری» که تازه تدریس و معرفی شده است، از «مسایل کلامی» استفاده می‌شود. رویکرد دیگر این است که از مسایل شروع کنیم و سپس ریاضیات مرتبط با آن را توسعه دهیم. توجیه ریاضی‌ورزی. به عبارت دیگر، شاید باید ترتیب کارهایی را که داریم انجام می‌دهیم، برعکس کنیم. فکر می‌کنم این، معقول باشد. شما هم موافقت می‌کنید؟

تذکره ۸:

من، درباره‌ی استفاده‌ی نادقیق از زبان و مسایلی که از آن ناشی می‌شود، صحبت کردم. در این جا، چند نکته‌ی خاص در این خصوص را مطرح می‌کنم. به نظر نمی‌رسد بر روی تمایز بین نماد نشان‌دهنده‌ی جمع، عمل جمع، حاصل جمع و علامت اعداد غیرمنفی، تأکید زیادی بشود. گاهی «به‌اضافه»^۳ و «جمع»^۴ و «مجموع»^۵ و «مثبت»^۶، به جای هم استفاده می‌شوند. همان‌طور که ۲ به‌اضافه‌ی ۳، می‌شود ۵؛ مجموع ۲ و ۳ نیز ۵ است و در مقابل اگر ۲ را با ۳ جمع کنیم، ۵ می‌شود.

«جمع»^۷، نام یک عمل است. «به‌اضافه»، هدایت به سمت انجام عمل جمع است. «مجموع» یا «حاصل جمع»، چیزی است که در عمل جمع به دست می‌آید.

واژه‌ی «و»^۸ نیز کاربردی مشابه دارد، هر چند هیچ ربطی به عمل جمع ندارد! جمله‌ی «۲ و ۳ می‌شود ۵» هیچ معنایی ندارد مگر زمانی که منظور از «و»، یکی از عملگرهای جبر بول^۹ باشد که در آن صورت باید این جمله را در رده‌ی گزاره‌های نادرست قرار داد. به همین صورت، هر وقت که از دانش‌آموزان می‌شنوم که در بیان اعداد «منفی»^{۱۰}، از واژه‌ی «منها»^{۱۱} استفاده می‌کنند، یکه می‌خورم. چه چیز می‌تواند استفاده‌های نادرست از واژه‌های «تفریق»^{۱۲}، «اختلاف»^{۱۳}، «منها» و «منفی»، را در زمینه‌های

نامناسب، توجیه کند؟

اغلب جملاتی از این قبیل را می بینیم یا می شنویم:

[۲] منهای ۳ می شود منهای ۱ [۱] $1 - 3 = 2$.

این ناراحت کننده است که ما اجازه می دهیم در کلاس های درس ریاضی مان، چنین آشفتگی هایی وجود داشته باشد. به هر حال، این سومین بار است که به این موضوع پرداخته ام؛ بهتر است آن را رها کنم.

تذکر ۹:

«یک لگد دیگر به قوطی نوشابه.»

همه ی زبان های کامپیوتری، به جز زبان بیسیک- که مدت ها است زمان آن گذشته است- میان عمل گر تساوی «=» و عملکرد منطقی هم ارزی « \equiv »، تمایز قائل می شوند. در ریاضیات مدرسه ای، به هر دلیلی، این تمایز هرگز وجود نداشته است. در $x = 3$ و $2 + 3 = 5$ ، فرض بر این است که علامت «=» در هر دو دقیقاً به یک معنا می باشد. و فرض بر این است که ریاضی یک موضوع دقیق است؟

تذکر ۱۰:

اگر چیزی مثل یک قرارداد اجتماعی بین جامعه و نظام مدارس عمومی وجود داشت که مشخص کند برنامه ی درسی ریاضی چه باید باشد، از خود پرسید که محتوای چنین برنامه ای شامل چه چیزهایی می تواند باشد؟ به نظر من، آمار باید جزو برنامه باشد تا شهروندان بتوانند اطلاعات اقتصادی را که تمام تصمیمات سیاسی براساس آن ها گرفته می شود، بفهمند. هم چنین در این برنامه، حسابداری و مدیریت اموال شخصی باید گنجانده شود تا شهروندان، عاقلانه هزینه کنند و بتوانند برای دوره ی بازنشستگی خود، پس انداز کنند و از نظر مالی، مسئولیت پذیر شوند.

آیا این موضوعات، در نظام مدارس عمومی، آموزش داده می شود؟ در بعضی از نظام های آموزشی، تنها در حد یک اشاره ی کوتاه وجود دارند و اغلب برای رشته های غیر ریاضی و علوم، رزرو می شوند. آیا علت آن این است که «دانش آموزان رشته های ریاضی و تجربی»، لازم نیست شهروندان مسئولی باشند، یا به این دلیل است که این موضوعات برای اغلب دانش آموزان، بسیار ساده هستند؟ در عوض، به این دانش آموزان، فاکتورگیری تدریس می شود.

آن هم به تفصیل. از تک جمله ای ها فاکتور می گیرند. از دو جمله ای ها فاکتور می گیرند. از سه جمله ای ها فاکتور می گیرند. از چند جمله ای های پیچیده فاکتور می گیرند. آخر که چه؟ برای تربیت شهروندانی مسئولیت پذیر و لایق؟ یا به این دلیل که برای حل «معادلات» دانستن آن ها لازم است؟ بیایید «جدی» باشیم.

تذکر ۱۱:

واژه ی «معادلات» در پایان تذکر قبل، درون علامت نقل قول قرار داده شد. این، مثالی از یک معادله است: $2 + 3 = 5$. $x = 7$ نیز مثالی دیگر است.

$x + y = 7$ یک معادله نیست. یک رابطه^{۱۵} است.

یک تفاوت میان معادله و رابطه این است که مسایل اندکی وجود دارند که به معادله ختم می شوند- فقط معماها. در این جا از تعریف مسأله و معما استفاده کرده ام که در یکی دیگر از «تذکرات»، به آن خواهیم پرداخت.

به هر حال، بحث ساختن رابطه ها، اگر نگوئیم در همه ی آن ها، اما در اغلب متون ریاضی مدرسه ای به طرز نامناسبی مطرح می شود و موجب بروز مشکلات غیر ضروری زیادی می گردد. واقعاً باید این مسأله را در زمان دیگری شرح و بسط دهم.

تذکر ۱۲:

بحث های زیادی است که کامپیوتر، تقریباً مهم ترین اختراع وابسته به ریاضی است. به کمک کامپیوتر، رویه^{۱۶} هایی برای حل مسایل پدید آمده اند که نه تنها کارآمد هستند، بلکه بسیار سریع تر و آسان تر از رویه های قدیمی، کارها را انجام می دهند. درحقیقت، اغلب موضوعاتی که در ریاضی سنتی مدرسه ای به آن پرداخته می شود، توسط تکنیک های کامپیوتری، غیر قابل استفاده و منسوخ شده اند. هم اکنون سه دهه از انقلاب کامپیوترهای شخصی گذشته است. آیا برنامه ی درسی ریاضیات مدرسه ای، کامپیوتر را به رسمیت شناخته است؟

تذکر ۱۳:

تدریس ریاضی، برعکس انجام می شود. یک سناریوی نوعی (مرسوم) را در نظر بگیرید: اول معرفی مفهوم، بعد تمرین و در پایان، چند «مسأله ی کلامی» که فرایند حل آن ها، متضمن به کارگیری آن مفهوم است. یعنی حرکت از عام به خاص. اما همه می دانیم که یادگیری، همیشه برعکس است: از خاص

