احتمال دوجمله‌ای

نرگس عصار زادگان
دبیر ریاضی اصفهان

در تدریس احتمال دوجمله‌ای و مثلث خیام ـ پاسکال، بیان مثال زیر می‌تواند سودمند باشد.

در صورت پرتاب یک سکه ممکن است رو یا پشت ظاهر شود. اجازه دهید این وضعیت ۵۰-۵۰ را با عددهای ۱ و ۱ نشان دهیم.

اگر سکه‌ای را دو بار پرتاب کنید، ممکن است به دو رو؛ یا یک رو و یک پشت، یا یک پشت و یک رو؛ یا دو پشت دست یابید. با جمع دو پیشامد وسط با هم داریم ۱ و ۲ و ۱.

اگر سکه‌ای را سه بار پرتاب کنید، ممکن است ۳ رو؛ یا دو رو و یک پشت به سه راه: ر ـ ر ـ پ، ر ـ پ ـ ر یا پ ـ ر ـ ر؛ یا دو پشت و یک رو به سه راه: پ ـ پ ـ ر، پ ـ ر ـ پ، یا ر ـ پ ـ پ؛ یا سه پشت داشته باشید. این حالت‌های ممکن می‌تواند به صورت ۱ و ۳ و ۳ و ۱ خلاصه شود.

به همین ترتیب، این حالت‌شماری‌ها را می‌توان به شکل فشرده، در یک آرایه‌ی مثلثی کنار هم قرار داد.

۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱
۱ ۹ ۳۶ ۸۴ ۱۲۶ ۱۲۶ ۸۴ ۳۶ ۹ ۱
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

مثلث خیام ـ پاسکال

هر عدد، از جمع دو عدد مجاور ردیف بالا به‌دست می‌آید. مثلاً در ردیف هفتم، ۶+۱۵=۲۱.

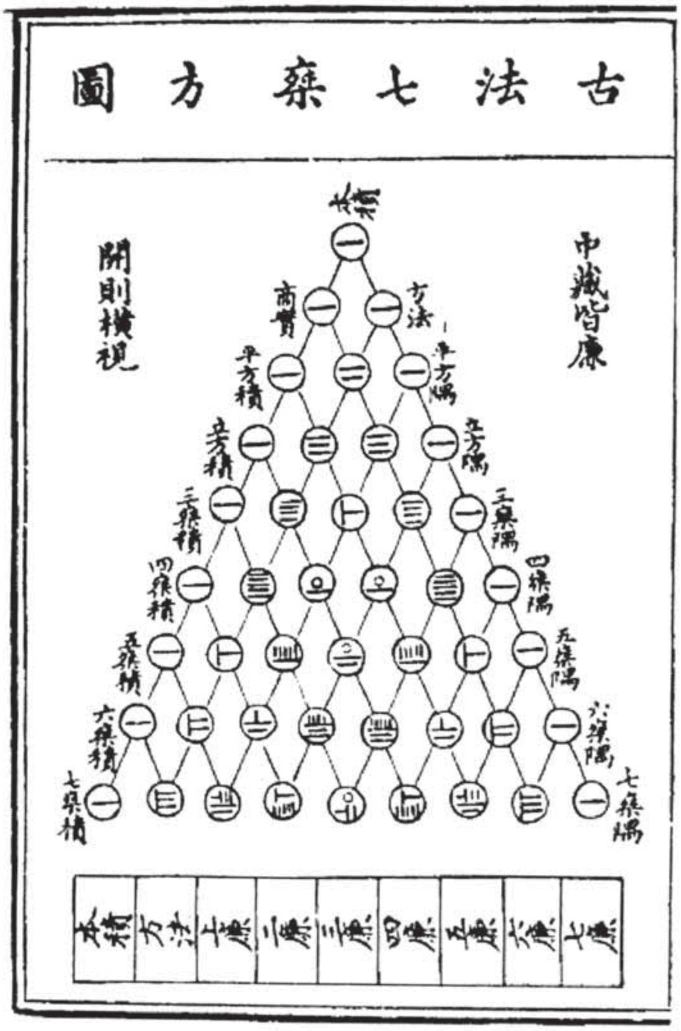
حال به ردیف پنجم نگاه کنید. اعداد این ردیف نشان می‌دهد اگر سکه‌ای ۵ بار پرتاب شود،

یک راه برای به‌دست آوردن ۵ رو، ۵ راه برای به‌دست آوردن ۴ رو و ۱ پشت، ۱۰ راه برای به‌دست آوردن ۳ رو و ۲ پشت، ۱۰ راه برای به‌دست آوردن ۲ رو و ۳ پشت و بالاخره ۵ راه برای به‌دست آوردن ۴ رو و ۱ پشت و تنها یک راه برای به‌دست آوردن ۵ رو، وجود دارد. فرض کنید بخواهیم احتمال ۴ رو و ۱ پشت در ۵ پرتاب را به‌دست آوریم. با جمع همه‌ی اعداد ردیف پنجم، در کل ۳۲ نتیجه برای پرتاب ۵ سکه وجود دارد. لذا کسر $\frac{۵}{۳۲}$ نسبت تعداد پیروزی به تعداد کل نتایج آزمایش (در پرتاب ۵ سکه) را به‌دست می‌دهد. ما به تعریف ریاضی احتمال دست یافته‌ایم.

مثلث خیام ـ پاسکال ویژگی‌های پنهان بسیاری دارد که یکی از جالب‌ترین آن‌ها این است که اولین عدد بعد از ۱ در هر ردیف، همه‌ی اعداد دیگر آن ردیف را می‌شمارد اگر و تنها اگر اول باشد. ۵ و ۷ در سطرهای مربوطه، همه‌ی اعداد دیگر را می‌شمارند، اما ۶ و ۸ و ۹ چنین خاصیتی ندارند. به هرحال هر قدر مثلث را گسترش دهید، این ویژگی در کل مثلث برقرار است. این آرایه‌ی مثلثی از اعداد، هم دانسته‌های ما را در مورد احتمال گردآوری می‌کند و هم به ما کمک می‌کند اعداد اول را شناسایی کنیم.

ما در مثلث خیام پاسکال ضابطه‌ای برای اول بودن یافته‌ایم؛ اما افسوس که ساختن مثلث به قدر کافی بزرگ برای آزمایش اول بودن یک عدد بزرگ، کاری بس پرزحمت‌تر از آزمایش به‌روش قدیمی تقسیم است.

خیام، ریاضی‌دان مسلمان ایرانی، اعداد این مثلث را سال‌ها پیش از دیگران کشف کرد. جالب است بدانید یک ریاضی‌دان چینی به نام چو شی ـ چی[1] نیز در سال ۱۳۰۳ میلادی، در یک کتاب این ضرایب را به‌دست آورده است. نسخه‌ی اصلی کتاب از بین رفته اما کپی‌های آن موجود است که در شکل زیر نمونه‌ای از آن را مشاهده می‌کنید.



مثلث چو شی ـ چی[2]

جدول این ضرایب در ۱۵۵۴ ابتدا توسط یک ریاضی‌دان آلمانی به نام اشتیفل[۳] ارایه شد، سپس پاسکال در ۱۵۷۰، مثلث خود را ارائه داد.[۴] [۱]

***

به هنگام تدریس استقلال پیشامدها می‌توان مثال جالب زیر را به‌کار برد:

فرض کنید خانواده‌ی دوست شما ۴ فرزند دختر دارد و فرزند پنجم نیز در راه است. چه‌قدر شانس وجود دارد که تازه‌وارد نیز دختر باشد؟ شما نباید روی پسر بودن شرط ببندید. حتی با این فرض که در یک جامعه‌ی بزرگ، تعداد خانواده‌های صاحب یک دختر و چند پسر نسبت به خانواده‌های صاحب یک پسر و چند دختر بیش‌تر باشد، شانس هنوز ۵۰-۵۰ است.

ممکن است مسأله این گونه مطرح شود: «همه‌ی خانواده‌های ۵ فرزندی را در نظر بگیرید. از این میان، به یقین، تعداد خانواده‌های صاحب ۵ دختر بیش از خانواده‌های صاحب ۴ دختر و ۱ پسر نیست.» درست است، بیش‌تر نیست. در واقع مثلث خیام ـ پاسکال دقیقاً نسبت‌های همه‌ی ترکیب‌های مربوط به ۵ فرزند را بیان می‌کند. در این‌جا دوباره سطر پنجم این مثلث را مرور می‌کنیم:

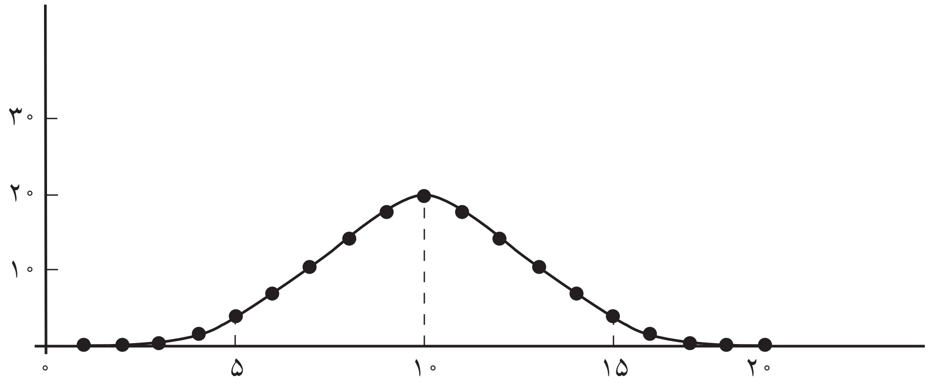
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

به‌طور متوسط، به‌ازای یک خانواده‌ی صاحب ۵ دختر، ۵ خانواده با ۴ دختر، ۱۰ خانواده با ۳ دختر، ۱۰ تا با ۲ دختر، ۵ تا با ۱ دختر، و یک خانواده بدون دختر و دارای ۵ پسر وجود دارد.

بسیار خوب، بنابراین پیروزمندانه سؤال می‌کنید، «اگر تعداد خانواده‌های صاحب ۴ دختر و ۱ پسر، نسبت به خانواده‌های صاحب ۵ دختر و بدون پسر بیش‌تر باشند، پس چرا خانواده‌ی دوست من که تاکنون ۴ دختر دارد، شانس زیادی برای داشتن فرزند پسر بعدی ندارد؟» پاسخ به عبارت «تا کنون» بازمی‌گردد. در بررسی یک خانواده‌ی ۵ فرزندی که تاکنون $\frac{۴}{۵}$ فرزندان آن تعیین شده، عضو پنجم دیگر یک عضو تصادفی نیست. خانواده‌ی دوست شما نمی‌تواند با همه‌ی خانواده‌های دارای ۴ دختر، و ۱ پسر مقایسه شود. بلکه تنها می‌تواند با خانواده‌های صاحب ۴ دختر، و ۱ پسر که پسر کوچک‌ترین فرزند آن‌ها است، مقایسه شود؛ و تعداد این گونه خانواده‌ها دقیقاً با تعداد خانواده‌های دارای ۵ دختر، یکی است. از این رو شرط‌بندی جایی ندارد!

***

در یکی از تمرین‌های فصل احتمال کتاب جبر و احتمال، ابتدا نموداری برای نمایش احتمال رخ دادن پیشامد رو در پرتاب ۲۰ سکه نمایش داده شده، سپس این سؤال مطرح شده است: *اگر تعداد سکه‌های پرتاب شده را افزایش دهیم، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می‌کنند؟* [۳] در این قسمت، این سؤال را به‌طور دقیق بررسی می‌کنیم.



نمودار (۱)

در صورت ۱۰ بار پرتاب یک سکه، شاید دقیقاً ۵ رو و ۵ پشت رخ دهد، یا شاید رخ ندهد. اما افراد بسیاری که در استنتاج های ذهنی خود خیلی دقیق نیستند این گونه نتیجه گیری می کنند: «ده پرتاب کافی نیست، «با توجه به قانون میانگین ها» اگر تعداد پرتاب ها بیش تر شود، شانس بهتری برای به دست آوردن دقیقاً نیمی رو و نیمی پشت خواهیم داشت. و اگر دفعات زیادتری مثلاً، ۱۰۰۰ پرتاب داشته باشیم، شانس ها به قدری عالی می شوند که دقیقاً ۵۰۰ رو و ۵۰۰ پشت به دست خواهیم آورد.»

چنین تصوری اشتباه است. مثلث خیام ـ پاسکال داستان صحیح را به ما می گوید. فقط به سطور زوج دقت کنید، زیرا اگر تعداد پرتاب ها فرد باشد انتخاب نصف آن ها ناممکن است، می بینیم که اگر سکه ای را تنها دو بار پرتاب کنیم، احتمال به دست آوردن نیمی رو و نیمی پشت (یکی از هر کدام) $\frac{۱}{۲}$ است. این احتمال هرگز از این مقدار زیادتر نمی شود. از جایی که هست پایین می آید، اما بالا نمی رود! در ۴ پرتاب دقیقاً احتمال رو آمدن نصف پرتاب ها $\frac{۶}{۱۶}$ یا $\frac{۳}{۸}$ است[۵] (شش راه پیروزی از بین ۱۶ راه انجام پرتاب ـ تعریف ریاضی احتمال). در ۶ پرتاب، دقیقاً احتمال رو آمدن نصف پرتاب ها $\frac{۲۰}{۶۴}$ یا $\frac{۵}{۱۶}$ است. چند احتمال اول در جدول زیر آمده است:

تعداد پرتاب ها	احتمال رو آمدن دقیقاً نصف پرتاب ها
۲	$\frac{۱}{۲}=۰/۵۰۰۰$
۴	$\frac{۶}{۱۶}=۰/۳۷۵۰$
۶	$\frac{۲۰}{۶۴}=۰/۳۱۲۵$
۸	$\frac{۷۰}{۲۵۶}=۰/۲۷۳۴$
۱۰	$\frac{۲۵۲}{۱۰۲۴}=۰/۲۴۶۱$
۱۲	$\frac{۹۲۴}{۴۰۹۶}=۰/۲۲۵۶$

جدول (۱)

نکته ی جالب توجه این که احتمال در جهت کاهش به سمت صفر ادامه دارد. به زبان ریاضی، «می تواند مقدار کوچک دلخواه تولید کند.» شما می توانید هر قدر بخواهید احتمال را با «پرتاب به اندازه ی کافی زیاد»، کاهش دهید.

***

در بخش قوانین احتمال کتاب جبر و احتمال سال سوم ریاضی مثال زیر آمده است:

اگر بخواهیم احتمال این که حداقل دو نفر از بین n نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را به دست آوریم از دستور زیر استفاده می کنیم: [۳]

$$p(A')=۱-\frac{۳۶۵\times ۳۶۴\times\cdots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^{n}}$$

سپس جدول صفحه ی بعد ارایه شده است: (جدول ۲)

درصد احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان	تعداد افراد در گروه
۰	۲
۲	۴
۴	۶
۷	۸
۱۲	۱۰
۱۷	۱۲
۲۲	۱۴
۲۸	۱۶
۳۵	۱۸
۴۱	۲۰
۴۸	۲۲
۵۴	۲۴
۶۰	۲۶
۶۵	۲۸
۷۱	۳۰
۷۵	۳۲
۸۰	۳۴
۸۳	۳۶
۸۶	۳۸
۸۹	۴۰
۹۱	۴۲
۹۳	۴۴
۹۵	۴۶
۹۶	۴۸
۹۷	۵۰

جدول (۲)

در این قسمت بیان متفاوت و جذاب‌تری از این مثال ارایه می‌شود:

«اگر در یک مهمانی بزرگ ـ شامل ۱۲ زوج یا بیش‌تر ـ که در آن صحبت‌های غیررسمی در جریان است حضور دارید، از مهمانان حاضر در مجلس بپرسید: «چه قدر احتمال می‌دهید که دو نفر از شما یک تاریخ تولد داشته باشید؟» چون ۳۶۵ روز تولد ممکن وجود دارد، اغلب مهمان‌ها یک مرتبه بیان می‌کنند تقریباً ناممکن است که دو نفر یک تاریخِ تولد داشته باشند. برخی از آن‌ها حتی شرط‌بندی می‌کنند. ما باید شرط آن‌ها را ببریم. با توجه به جدول بالا ۵۴٪ احتمال دارد که از میان ۲۴ فرد تصادفی دست‌کم ۲ نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند، یعنی احتمال از نصف بیشتر است، و وقتی شمار افراد از ۲۴ بیشتر باشد، احتمال به‌سرعت افزایش می‌یابد، به‌طوری که در ۵۰ نفر ۹۷٪ احتمال وجود دارد که دست‌کم دو نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند.

سعی خودتان را بکنید. اگر همواره جواب نمی‌دهد، ناامید نشوید؛ اگر فرصتی برای انجام آزمایش با چند گروه مختلف دارید، اغلب با افرادی که روز تولد یکسان دارند مواجه می‌شوید. اگر نگران هستید که آن‌ها حقه بزنند، از هر کدام بخواهید تاریخ تولدشان را روی تکه‌های کوچک کاغذ بنویسند سپس این تکه‌های کاغذ را جمع‌آوری کرده و آن‌ها را بخوانید. اکنون موضوع این نیست که آیا تاریخ تولد صحیح را نوشته‌اند یا نه، چون آن‌ها از تاریخ‌های دیگران آگاهی ندارند: تاریخ‌های روی تکه‌های کوچک کاغذ نیز تصادفی هستند.

از آن‌جا که همکار من این مسأله را با شک و تردید پذیرفته بود، یک بار آن را در یک کلاس بزرگ دانش‌آموزان مطرح کرد و گفت: «می‌خواهم شرط ببندم که دو نفر از شما در این کلاس حتماً یک تاریخ تولد دارید.» انفجار خنده او را گیج کرده بود تا وقتی به یاد آورد جفت دوقلوهای هم‌سان در ردیف جلو نشسته‌اند! [۲]»

زیرنویس‌ها

1. Chu Shi- Chieh
2. J. Needham, Science and Civilization in China, Vol.3 (New York: Cambridge University Press, 1959), p.135.
3. Stifel M. Stifel, Arithmetica Integra (Norimburgae, 1544).
4. Cardano, Opus Nouum de Proportionibus Numerorum (Basilea, 1570).
5. احتمال رو آمدن دقیقاً نصف پرتاب‌ها از به‌کارگیری دستور $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ به دست می‌آید.

منابع

[1] Charles M. Grinstead: Swarthmore College & J. Laurie Snell: Dartmouth College. **Introduction to Probability**. Available: http://www.dartmouth.edu/~chance[2006]

[2] C. Stanley Ogilvy. **Excursions in Mathematics**. (1984). Dover Publications, INC. NewYork.

[۳] ظهوری زنگنه. بیژن، گویا. زهرا، تابش، یحیی، ایلخانی‌پور. یدالـله. **جبر و احتمال سال سوم نظام جدید آموزش متوسطه**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی، وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتب درسی، ۱۳۸۶.