

# a

## چه ساکت است!

امیرحسین اصغری، استادیار آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

داستان جبری که «زبان ریاضی» است نه «زبانی برای بیان ریاضی»؛ جبری که به ترجمه‌ای خالی از معنی تقلیل یافته است، جبری که با نمادها، تنها با جملاتی این چنینی پیوند می‌خورد:

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود...

ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان، ص ۲۰

اما افسوس که نمادها خود سخن نمی‌گویند (اسفارد، لینچنسکی؛ ۱۹۹۴، ص ۸۷) اگرچه بهترین ابزار برای بیان تعمیم‌اند. ولی وقتی نه موقعیتی در کار است نه مسئله‌ای که نیازمند به کارگیری این ابزار است، آن چه که می‌ماند «تمرین در کلاسی» است برای ترجمه‌ی لفظ به لفظ:

### تمرین در کلاس:

۱. جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به کار برده می‌شوند، بنویسید.  
الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با

### اشاره

در شماره‌های ۹۲ و ۹۵ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، مقاله‌هایی با عنوان «a چه خوشمزه است» و «گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری» از دکتر امیرحسین اصغری به چاپ رسید که در مقاله‌ی نخست، مشکلات آموزش جبر با بررسی روش معرفی نمادها و بدفهمی‌های حاصل از آن، بررسی شد. مقاله‌ی حاضر، در ادامه‌ی آن مقاله‌ها و از زاویه‌ای دیگر به بررسی این مشکلات، می‌پردازد. در این مقاله، مشکلات جبر، که به عنوان «زبان ریاضی» است، زمانی که به عنوان «زبانی برای ریاضی» در نظر گرفته می‌شود و در آموزش نمادین آن، بسیاری از ظرافت‌ها، فراموش شده یا بدیهی فرض می‌شوند، مطرح شده است. امید داریم با این مقالات، دبیران گرامی، خود با هوشیاری بیش‌تری به رفع مشکلات آموزش جبر نائل آیند.  
رشد آموزش ریاضی

اولی: دوست من می‌تونه به شش زبان زنده‌ی دنیا صحبت کند!  
دومی: عجب! حالا اون با این شش زبان چه می‌گه!؟

گفت وگویی واقعی بالا یادآور داستانی واقعی‌تر است:

خودش .

(ب) .....

۲. جمله‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید .

(الف)  $a \times a > 0$  یا  $a \times a = 0$

(ب) .....

ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان، ص ۲۲

باد کشتی را به گردابی فکند  
گفت کشتی بان به آن نحوی بلند  
هیچ دانی آشنا کردن بگو  
گفت نی ای خوش جواب خوب رو  
گفت کل عمرت ای نحوی فناست  
زانک کشتی غرق این گرداب هاست

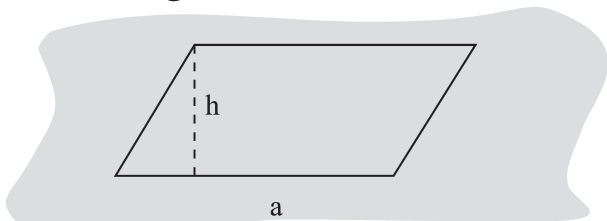
دفتر اول مثنوی

حکایت نحوی و کشتی بان

### مترجم خوب، نحوی خوب

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم. در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان دهنده‌ی عدد دلخواهی باشند. (کتاب ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان، ص ۲۲)

مثال. (این مثال برگرفته از کتاب ریاضیات ۱ نیست، ولی کاملاً به سبک و سیاق مثال‌های آن کتاب تنظیم شده است؛ مثال کتاب در مورد مساحت مثلث است.) برای بیان این که «مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول یک قاعده در ارتفاع نظیر آن قاعده»، می‌گوییم: یک متوازی‌الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را  $a$  و ارتفاع نظیر آن قاعده را  $h$  بنامید، در این صورت:

$$ah = \text{مساحت متوازی‌الاضلاع}$$


اکنون دانتزیگ حق دارد پرسد (به بخش قبل نگاه کنید): آیا حقیقتاً نوشتن مساحت متوازی‌الاضلاع به شکل  $ah$ ، بیش از شکل کلامی این مساحت، چیزی به شخص می‌آموزد؟ و شما ممکن است پاسخ دهید:

خُب، این سؤال در این مورد بی‌ربط است. دانش‌آموزانی که در سال اول دبیرستان درس می‌خوانند مساحت متوازی‌الاضلاع را در سال چهارم دبستان یاد گرفته‌اند، پس می‌توان از آن برای دست‌یابی به اهداف این فصل (فصل یک، کتاب ریاضیات ۱) استفاده کرد؛ بنابراین راهنمای تدریس، یکی از اهداف این فصل

اشکال در کجاست؟ «مگر علامت‌گذاری حرفی چیزی جز ... یک تندنویسی مناسب است؟» (دانتزیگ، ص ۱۱۵). اگر شما در پاسخ به سؤال دانتزیگ عجله کنید، احتمالاً پاسخ خواهید داد: البته که نه؛

و اضافه خواهید کرد:

علاوه بر این، می‌توان برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده کرد!!

چنین پاسخی شاید شمای ریاضی‌خوانده (مؤلف، محقق، معلم) راقانع کند، اما شمای آموزشگر (مؤلف، محقق، معلم) را با چالشی جدی‌تر روبه‌رو می‌کند، چالش پاسخ به سؤال بعدی دانتزیگ (همان‌جا، ص ۱۱۵):

بی‌شک در طرز نوشتن  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  صرفه‌جویی وجود دارد، اما آیا حقیقتاً این شکل نوشتن بیش از شکل بیانی این رابطه، یعنی «مجذور حاصل جمع دو عدد برابر است با مجموع مجذورات هر یک از آن‌ها به علاوه‌ی دو برابر حاصل ضرب یکی در دیگری» چیزی به شخص می‌آموزد؟ پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول، به معنی پاک کردن صورت سؤال دوم و تلاش برای به دست آوردن ابزار به قیمت محروم کردن دانش‌آموزان از لزوم و هدف جبر است:

«نیاز به تعمیم، بیان و توجیه آن» (می‌سون، ۲۰۰۵)

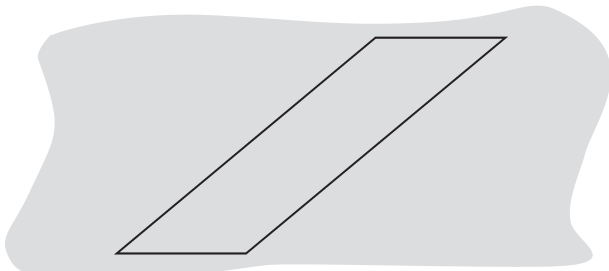
اما بسیاری از دانش‌آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادث‌تر است (کوچمن، هویلس؛ ۲۰۰۵). پس پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول و تأکید بر جنبه‌ی «زبانی» جبر، به تعبیری «ساده»‌ترین کار ممکن است؛ چرا که دانش‌آموزان از قسمت سخت کار (و البته معنی دار آن) معاف و عهده‌دار ترجمه‌ی جمله‌های فارسی یا جبری ما خواهند شد؛ و اگر ما موفق شویم که مترجم خوبی تربیت کنیم، در نهایت فردی خواهیم داشت که می‌تواند به هفت زبان «زنده‌ی» دنیا صحبت کند ولی چیزی برای گفتن نمی‌یابد، نحوی خوبی که شنا کردن نمی‌داند!

«ترجمه‌ی بین جملات فارسی و ریاضی» است.

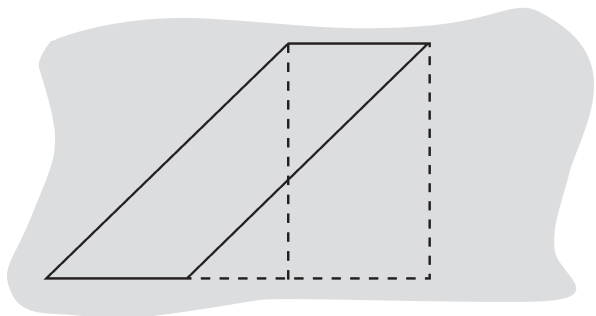
این جواب می‌تواند قانع‌کننده باشد، در صورتی که بپذیریم که دانش‌آموز ما «معنی ریاضی» نهفته در جمله‌ی فارسی مورد نظر برای ترجمه را به درستی درک می‌کند؛ اما، به نظر می‌رسد چنین درکی با درک مورد نظر مؤلفین کتاب ریاضیات ۱ متفاوت است. فرض مؤلفین کتاب این است که:

● دانش‌آموزان جملات فارسی را به خوبی می‌فهمند و درک می‌کنند. بنابراین یک عمل ترجمه از زبان فارسی به زبان نمادین و برعکس به خوبی می‌تواند معنای جملات نمادین را مشخص سازد (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱، ص ۳۳). برای روشن کردن تفاوت بین «درک جمله‌ی فارسی» و «درک ریاضیات نهفته در جمله‌ی فارسی» اجازه دهید با ورت هایمر (۱۹۴۵) به یک کلاس درس ریاضی برویم. معلم کلاسی که ورت هایمر آن را مشاهده می‌کند، مساحت متوازی‌الاضلاع را بسیار شبیه آن روشی که در کتاب چهارم دبستان ما آمده است آموزش می‌دهد؛ بنابراین من این قسمت داستان را از کتاب چهارم دبستان (ص ۱۷۵) نقل می‌کنم:

پس از انجام «فعالیت» بالا و با به‌کارگیری چند متوازی‌الاضلاع دیگر، معلم مطمئن می‌شود که «همه‌ی بچه‌های کلاس» می‌دانند که مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن. اکنون، به طور یقین، همه‌ی دانش‌آموزان معنی جمله‌ی فارسی مورد نظر را به خوبی درک می‌کنند، و حتی کمی بیش‌تر، به نظر می‌رسد که معنی ریاضی نهفته در آن را نیز می‌فهمند؛ چرا که روز بعد همه‌ی دانش‌آموزان می‌توانند فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع را به درستی تکرار کنند و حتی یکی از دانش‌آموزان «متوسط» کلاس به درخواست معلم نحوه‌ی به دست آوردن مساحت را شرح می‌دهد. اما ماجرا هنوز تمام نشده است. ورت هایمر (پس از اجازه گرفتن از معلم کلاس) شکل زیر را روی تخته رسم می‌کند.

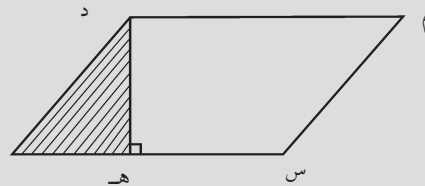


بعضی از بچه‌ها اعتراض می‌کنند که ما این را نخوانده‌ایم، و بعضی دیگر همان کاری را می‌کنند که معلم به آن‌ها «آموزش» داده است: قاعده‌ی پایینی را کمی گسترش می‌دهند و از دو رأس بالایی دو عمود بر آن رسم می‌کنند (شکل زیر):



و سپس به فارسی سلیس (البته در مورد کلاس مورد بحث، به انگلیسی سلیس!) اعلام می‌کنند که «مساحت برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع»! ولی وقتی از آن‌ها خواسته می‌شود که با استفاده از شکلی که رسم کرده‌اند، «معنی» جمله‌ی سلیس خود را روشن کنند، گیج و بهت زده به ورت هایمر و البته به معلم خود نگاه می‌کنند!!

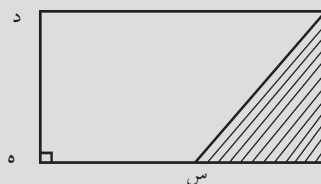
در متوازی‌الاضلاع زیر، ارتفاع (ده) رسم شده است.

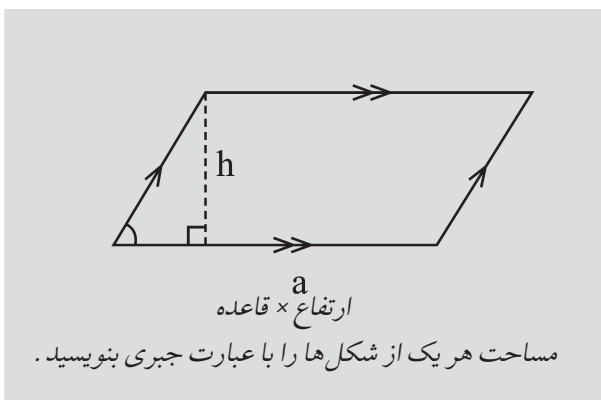


ضلع (س) قاعده‌ی نظیر این ارتفاع است. این ارتفاع و قاعده‌ی نظیر آن را اندازه بگیرید و جمله‌های زیر را کامل کنید. ارتفاع (ده)... سانتی متر و قاعده‌ی نظیر آن... سانتی متر است. اگر در متوازی‌الاضلاع بالا، مثلث (در ه) را جدا کنیم و آن را در طرف دیگر متوازی‌الاضلاع بچسبانیم، مستطیلی به شکل زیر به دست می‌آید. مساحت متوازی‌الاضلاع بالا با مساحت این مستطیل برابر است...

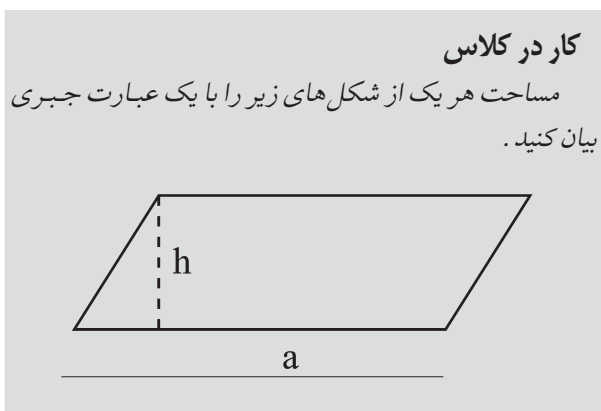
پس

مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن





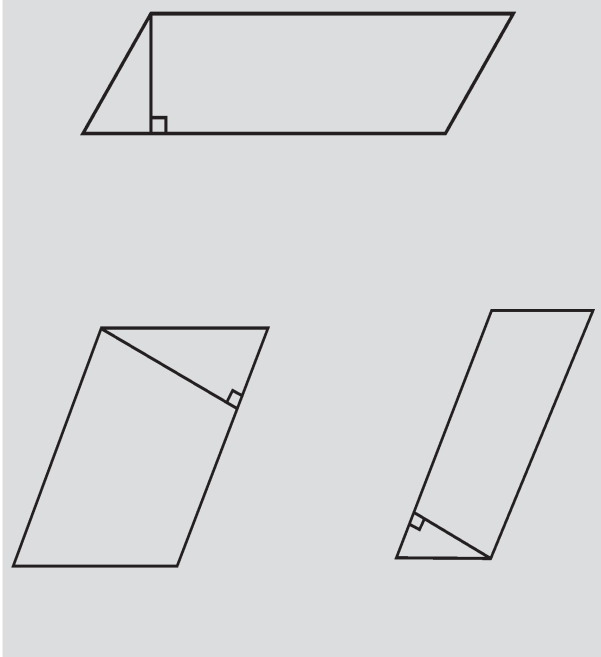
و دوباره در سوم راهنمایی (کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی، ص ۵۳):



اکنون دانش آموز «خوب» ما در کلاس اول دبیرستان است و ما برای این که دوباره (!) به او نشان دهیم که در اوقاتی که «می خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان دهنده ی عدد دلخواهی باشند.» (ریاضی ۱، ص ۲۲) مساحت متوازی الاضلاع را به زبان نمادین ترجمه می کنیم. اما اعداد مربوط به طول قاعده و طول ارتفاع نظیر آن، تا چه اندازه برای دانش آموزی با تجربه ی دانش آموز ما اعدادی دلخواه محسوب می شوند؟ آیا عجیب است که او (حتی اگر با کمال خوش بینی فرض کنیم که به چیزی فرای یک ترجمه به این مثال نگاه کند)، عدد منسوب به طول قاعده را بزرگ تر از عدد منسوب به طول ارتفاع فرض کند! شاید همین قدر درک هم مورد نظر نباشد، چرا که ما مترجم خوب می خواهیم، چرا که «اهداف کلی رفتاری و عملکرد مورد انتظار از دانش آموز» این است که «با نمادها جملات ریاضی را بیان کند و جملات ریاضی را به زبان فارسی

اکنون، دوباره می توان پرسید: آیا بیان نمادین مساحت متوازی الاضلاع به شکل  $ah$ ، چیزی بیش تر به این دانش آموزان می آموزد؟ اگر شما چالشی را که ورت هایمر برای دانش آموزان ایجاد کرد «غیرمنصفانه» می دانید، اجازه دهید که یک دانش آموز چهارم دبستان را (که از این شانس که ورت هایمر از کلاس او دیدن کند برخوردار نبوده است!) تا اول دبیرستان دنبال کنیم. دانش آموز ما پس از انجام موفقیت آمیز کار در کلاس، تمرین های زیر را نیز به درستی حل می کند (کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص ۱۷۵):

**تمرین**  
در هر متوازی الاضلاع قاعده و ارتفاع داده شده را برحسب سانتی متر اندازه بگیرید و مساحت آن را حساب کنید.

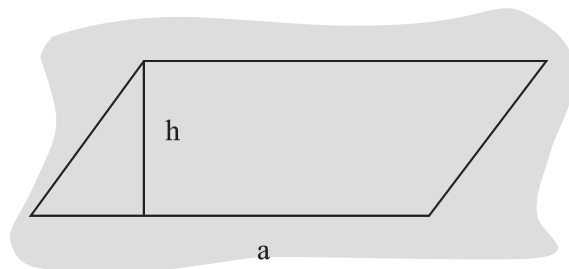


توجه کنید در همه ی این تمرین ها طول ارتفاع رسم شده برای دانش آموز، کمتر از طول قاعده ی نظیر آن است. سپس تا دوم راهنمایی از متوازی الاضلاع در کتاب های درسی ریاضی خبری نیست تا این که از دانش آموز ما خواسته می شود که تمرین زیر را حل کند (کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی، ص ۱۷۳):

بیان کند و توضیح دهد» (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱، ص ۲). اگر چنین است، اگر قرار است که نمادها تنها «برچسب»هایی باشند برای کلمات فارسی، چرا از مثال زیر استفاده نکنیم که حداقل برای دانش آموز ما تازگی دارد (ایده‌ی این مثال از ورت هایمر است):

مثال: برای بیان این که: «مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصل تفریق طول ارتفاع از طول قاعده‌ی نظیر آن تقسیم بر حاصل تفریق معکوس طول قاعده از معکوس طول ارتفاع نظیر آن»، می‌گوییم: یک متوازی الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را  $a$  و ارتفاع نظیر آن قاعده را  $h$  بنامید، در این صورت:

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{a-h}{\frac{1}{h} - \frac{1}{a}}$$



دانش آموزی که از پس حل این مثال برآید، به طور یقین مترجم خوبی است و اگر علاوه بر ترجمه، بتواند نشان دهد که عبارت

$$\frac{a-h}{\frac{1}{h} - \frac{1}{a}} \text{ با } ah \text{ برابر است، به طور یقین نحوی خوبی نیز خواهد}$$

بود چرا که توانسته است «بدون توجه به معنی نمادها و بر طبق قوانینی معین» (دمبسی، ۱۹۹۷، ص ۶۶)، عبارت

$$\text{گویای } \frac{a-h}{\frac{1}{h} - \frac{1}{a}} \text{ را ساده کند. با این حساب، ما با یک تیر دو}$$

نشان زده ایم، هم مترجم خوبی تربیت کرده ایم، هم نحوی خوبی؛ اما افسوس که نشان اصلی را نزده ایم!

### نشان اصلی

نشان اصلی جبر به بزرگی و وسعت همه‌ی آموزش عمومی ماست. ولی ما با جدا کردن آن از حساب در دبستان (استیسی، اصغری، ۱۳۸۸)، با تقلیل آن به یک زبان در راهنمایی و اول دبیرستان، با تأکید بیش از اندازه به زبان جبری به جای تفکر جبری (استیسی و اصغری؛ همان‌جا)، و به طور کلی، با جدا کردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصال نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها، همه‌ی فرصت‌های زدن نشانی به این بزرگی را از دست داده ایم. «فعالیت» زیر شاهد دیگری است از آن‌چه بر دانش آموز اول نظری ما گذشته (و می‌گذرد و به نظر می‌رسد که خواهد گذشت!)

فعالیت (کتاب ریاضی اول راهنمایی، ص ۹۱)  
در شکل مقابل، دو نوار مقوایی را می‌بینید که در نقطه‌ی  $O$

لولا شده‌اند. زاویه‌های ۱ و ۲ را دو زاویه‌ی متقابل به رأس می‌نامیم.

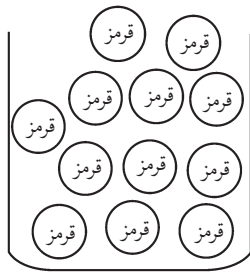
آیا این دو زاویه با هم مساوی‌اند؟  
با کامل کردن رابطه‌ها نشان دهید که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \dots = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

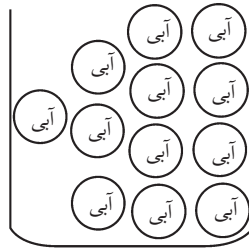
فرض کنید که دانش آموز شما لزوم «اثبات» این که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند را درک می‌کند (و این خود تقریباً فرضی محال است!)؛ آیا حتی با این فرض، «اثبات» داده شده به او کمک می‌کند که درک کند چه چیزهایی در این

بیش تر است یا تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی؟  
 لطفاً قبل از خواندن «فعالیت» زیر، به مسئله‌ی مهره‌ها فکر  
 و سعی کنید آن را حل کنید، چرا که «فعالیت» مذکور هم مسئله  
 را خراب و هم آن را حل می‌کند!!

«ساختار» هندسی ثابت اند و چه چیزهایی متغیر؟ یا این که چرا از  
 $O_4$  استفاده نشده در حالی که زاویه‌های دیگر نام گذاری شده‌اند؟  
 یا این که چرا این روابط خاص نوشته شده‌اند و نه بسیاری از روابط  
 ممکن دیگر؟ و آیا این «اثبات» چیزی بیش تر از استدلال کلامی  
 و نمایشی که با پوشاندن بخشی از شکل با دست حاصل می‌شود  
 به دانش آموز می‌آموزد (شکل زیر):

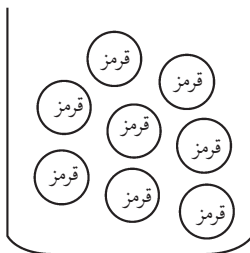


کیسه‌ی قرمز

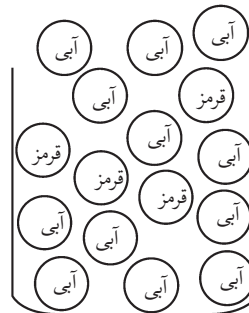


کیسه‌ی آبی

### موقعیت مسئله در شروع

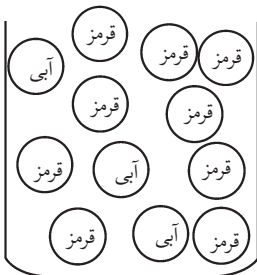


کیسه‌ی قرمز

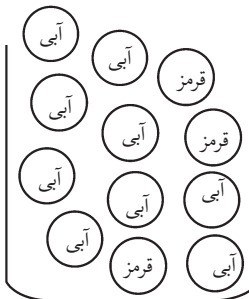


کیسه‌ی آبی

### موقعیت مسئله پس از انتقال مهره‌های قرمز از کیسه‌ی قرمز به کیسه‌ی آبی

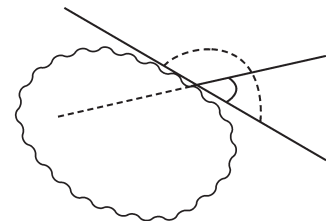


کیسه‌ی قرمز

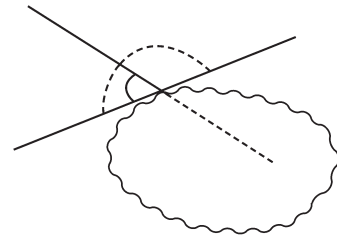


کیسه‌ی آبی

### موقعیت مسئله در انتها



این قسمت را با دست بپوشانید

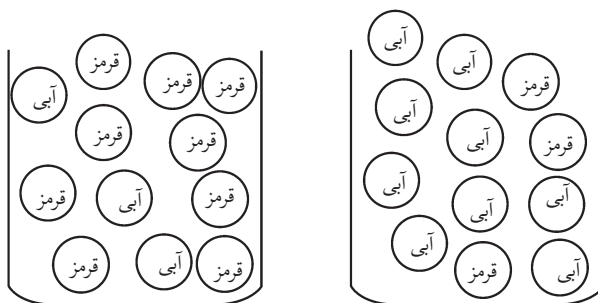


این قسمت را با دست بپوشانید

از آن جایی که این مثال بسیار آشنا است (هم چنان که مثال  
 متوازی الاضلاع بود) و از آن جا که این آشنایی ممکن است که  
 اهمیت سؤال‌های بالا را پنهان کند، اجازه دهید شما را به حل  
 مسئله‌ی دیگری دعوت کنم.

فرض کنید دو کیسه دارید. در یکی از کیسه‌ها (کیسه‌ی  
 قرمز)، ۱۸۰ مهره‌ی قرمز یک شکل و یک اندازه و در کیسه‌ی  
 دیگر (کیسه‌ی آبی)، ۱۸۰ مهره‌ی آبی به همان شکل و اندازه  
 است. شخصی تعدادی مهره‌ی قرمز را از کیسه‌ی قرمز برمی‌دارد  
 و در کیسه‌ی آبی قرار می‌دهد، سپس کیسه‌ی آبی را خوب به هم  
 می‌زند به طوری که مهره‌های قرمز در لایه‌ی لای مهره‌های آبی پخش  
 شود. همان شخص، با چشمانی بسته، به تعداد مهره‌های قرمزی  
 که به کیسه‌ی آبی انتقال داده است، از کیسه‌ی آبی مهره برمی‌دارد  
 (توجه کنید که این تعداد می‌تواند هم شامل مهره‌های آبی باشد و  
 هم مهره‌های قرمز) و در کیسه‌ی قرمز قرار می‌دهد. اکنون در  
 انتهای این جابه‌جایی، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز

● بسیاری از دانش آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادثر است



کیسه ی قرمز

کیسه ی آبی

$O_2$  ، تعداد مهره‌های قرمز در کیسه ی آبی ؛  $O_1$  ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه ی ، قرمز  $O_3$  ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه ی آبی

همه ی آن سؤال هایی که در وحله ی اول ، به دلیل عادت کردن به موضوع (زاویه های متقابل به رأس) بی ربط به نظر می رسید ، موضوعیت پیدا کنند : چرا از  $O_4$  (تعداد مهره های قرمز در کیسه ی قرمز) استفاده نشده است؟ چرا این روابط خاص نوشته شده اند و نه بسیاری از روابط ممکن دیگر؟ آیا «استدلال» نمادین بالا ، اصولاً چیزی به شخص می آموزد؟ آیا او درک خواهد کرد که در این مسئله ، چه چیزهایی ثابت اند و چه چیزهایی متغیر؟ آیا «استدلال» مذکور ، تجربه ی جبری بیش تری از استدلال کلامی - عددی زیر به همراه خواهد آورد؟

**فعالیت ۲**

فرض کنید دو کیسه دارید که در هر کدام ۱۸۰ مهره ی ... [مسئله ی بالا را دوباره بخوانید ، فقط سؤال آخر مسئله را با سؤال های زیر جایگزین کنید . ]  
 آیا تعداد مهره های آبی در کیسه ی قرمز با تعداد مهره های قرمز در کیسه ی آبی برابر است؟ با کامل کردن رابطه ها نشان دهید که چرا تعداد مهره های آبی در کیسه ی قرمز با تعداد مهره های قرمز در کیسه ی آبی برابر است؟

مهره ی قرمز	مهره ی آبی	
	۱۶۳	کیسه ی آبی
		کیسه ی قرمز

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 &= 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \dots &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

فرض کنید در انتها ۱۶۳ مهره ی آبی در کیسه ی آبی باقی مانده باشد . با توجه به این تعداد مهره ها در دو کیسه ، برابر با ۱۸۰ تا است ، از این جا به بعد اعداد خود را به شما تحمیل می کنند .

شکل بیان مسئله ی مهره ها ، اگرچه ممکن است برای شما چندان نامناسب نباشد ، برای اکثر دانش آموزان شما بسیار نامناسب و گیج کننده خواهد بود [برای دیدن شکل هیجان انگیزتر و قابل استفاده تری از این مسأله به مقاله ی «بهترین شروع کدام است؟» (اصغری ، ۱۳۷۹) نگاه کنید . ] از طرفی ، به طور یقین ، «فعالیت» طرح شده براساس مسئله ی گوی ها ، حتی برای شما نیز گیج کننده خواهد بود ، و این نه به خاطر پیچیدگی آن ، بلکه به دلیل بی محتوا شدن آن است . در واقع من برای طرح فعالیت مذکور دو دلیل دارم . اول این که در شما همان حسی را ایجاد کنم که دانش آموز اول راهنمایی شما آن را در مواجهه با «اثبات» تساوی زاویه های متقابل به رأس تجربه می کند ؛ اکنون شاید

اکنون اجازه دهید به راه حل «جبری» که در فعالیت گوی ها به شما تحمیل شد نگاهی بیاندازیم :

$$\left. \begin{aligned} O_1 + O_3 &= 180^\circ \\ O_2 + O_3 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow O_1 = O_2$$

این عبارت ها ، دقیقاً همان عبارت هایی است که ما به دانش آموز خود (در مسئله ی زاویه های متقابل به رأس) تحمیل کرده ایم و این دلیل دوم من برای طرح آن چنانی فعالیت گوی ها است . توجه کنید که  $O_1$  ،  $O_2$  و  $O_3$  «وجودی دارند مستقل از اشیای مشخصی که به نمایندگی آن ها مورد قبول قرار گرفته اند»

● با جدا کردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصال نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها، همه‌ی فرصت‌های زدن نشانی به این بزرگی را از دست داده‌ایم

(دانتزیگ، ص ۱۱۷). از طرفی «قابلیت نمادها برای انجام اعمال ریاضی» (دانتزیگ، همان‌جا) امکان می‌دهد که تساوی  $O_1$  با  $O_2$  مستقل از معنی‌ای که ما برای  $O_1$ ،  $O_2$  (و در این‌جا  $O_3$ ) قائلیم از دو تساوی  $O_1 + O_2 = 180^\circ$  و  $O_1 + O_3 = 180^\circ$  به دست آید.

این سکوت نمادها نسبت به زمینه‌ای که به آن‌ها معنی می‌بخشد همه‌ی قدرت جبر نمادین است. اما همین سکوت، «چشم اسفندیار» آموزش جبر است؛ جبری که یا پیوند خود را از زمینه بریده یا پیوند معنی‌داری با زمینه برقرار نکرده است؛ آموزشی که با گرفتن موضوع صحبت از دانش آموز، تأکید بر آسان صحبت کردن می‌کند! این چنین است که برای دانش آموز، سکوت نمادها نه نشانه‌ی قدرت، بلکه فریادی بی‌محتوا است.

#### پی‌نوشت

۱. پیشنهاد استفاده از این مثال را جدی نگیرید! توجه کنید که عبارت  $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$  در مورد ساختار هندسی متوازی‌الاضلاع هیچ چیزی نمی‌گوید و کاملاً به آن بی‌ربط است.
۲. این «فعالیت» با آگاهی از این تنظیم شده است که استفاده از عنوان «فعالیت» چیزی را تبدیل به فعالیت نمی‌کند!

#### منابع

1. Demby, A: (1997), Algebraic Procedures Used By 13-15-Years-Olds, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 45-70.
2. Küchemann, D. and Hoyles, C: (2005), Pupils' Awareness of Structure on Two Number/Algebra Questions, *Proceedings of the Fourth Conference of the European*, 438-448.
3. Mason, J: (2005), Frameworks for Learning, Teaching and Research: Theory and Practice, in Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.). *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the*

*International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

4. Sfard, A. and Linchevski, L: (1994), The Gains and the Pitfalls of Reification- The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

5. Wertheimer, M: 1945, *Productive Thinking*.

۶. استیسی، کبی و اصغری، امیرحسین (۱۳۸۸): گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری، *مجله‌ی رشد آموزش ریاضی*، شماره‌ی ۹۵، صص ۴-۱۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. اصغری، امیرحسین (۱۳۷۹): بهترین شروع کدام است؟، *مجله‌ی رشد آموزش ریاضی*، شماره‌ی ۵۹-۶۰، صص ۵۳-۵۲، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸. اصغری، امیرحسین و عبدالله پور، مریم (۱۳۸۷): *a* چه خوشمزه است!، *مجله‌ی رشد آموزش ریاضی*، شماره‌ی ۹۲، صص ۴۹-۴۷، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۹. دانتزیگ، تویاسر (۱۳۶۱): *عدد، زبان علم*. ترجمه‌ی مهندس عباس گرمان، شرکت سهامی کتاب‌های جیبی.

۱۰. کتاب *ریاضی چهارم دبستان* (۱۳۸۶): دکتر عبدالله شیدفر، دکتر مسعود فرزاد، پرویز فرهودی مقدم و دکتر رحیم کریمپور، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۱. کتاب *ریاضی سال اول راهنمایی* (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزاد، صفر با همت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۲. کتاب *ریاضی سال دوم راهنمایی* (۱۳۸۳): دکتر مسعود فرزاد، صفر با همت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۳. کتاب *ریاضی سال سوم راهنمایی* (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزاد، صفر با همت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۴. *ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان* (۱۳۸۷): شهرناز بخشعلی‌زاده، دکتر ناصر بروجردیان، زین العابدین دهقانی ابیانه، دکتر فرزاد دیده‌ور، محمد تقی طاهری تنجانی، دکتر وحید عالمیان و دکتر حمید مسگرانی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵. راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱،

<http://math-dept.talif.sch.ir>