بخش دوم

یادگیری حسابان در دام مفهوم حد و نمادها

یوسف آذرنگ
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی آذربایجان غربی

اشاره
بخش اول این مقاله را در شماره‌ی گذشته ی مجله خوانده‌اید. در آن بخش، به ریشه‌های تاریخی حسابان و مشکلات یادگیری آن پرداخته شد. اینک ادامه‌ی بحث:

نمادها و نقش آن‌ها در ساختار مفهومی

پیم[1] (۲۰۰۲)، معتقد است که با هر بحث کلی در ریاضی، یک نیاز اساسی برای نمادگذاری نیز وجود دارد و لازم است که رابطه‌ی بین نمادها و چیزهای نمادگذاری شده ایجاد شود. این همان چیزی است که قبلاً اسکمپ[2] (۱۹۸۹) ابراز کرده است «قدرت ریاضیات در ایده‌های آن می‌باشد اما دسترسی به این ایده‌ها و توانایی برای انتقال آن‌ها، وابسته به نمادگذاری ریاضی است» (ص۱۰۵). و برای این کار یک نظام نمادین را که شامل موارد زیر بود معرفی کرد:

یک مجموعه از نمادها ——(که متناظر است با)——> یک مجموعه از مفاهیم

همراه با

یک مجموعه از روابط بین نمادها ——(که متناظر است با)——> یک مجموعه از روابط بین مفاهیم

در ادامه اسکمپ (۱۹۸۹) درک نمادین را جذب متقابل یک نظام نمادین و یک ساختار مفهومی می‌داند که تحت تأثیر ساختار مفهومی است.

روند تجرید و خلاصه‌سازی مفاهیم ریاضی اهمیت زیادی دارد و محققان بسیاری از جمله دریفوس[3] (۱۹۹۱)، دوبینسکی[4] (۱۹۹۱) و اسفارد (۱۹۹۱) و تال و گری (۱۹۹۴) به آن پرداخته‌اند. در ارتباط با اهمیت آن وایت و میشل مور[5] (۲۰۰۲) بیان می‌کنند: «با این فرض که مفاهیم مجرد در تمام مراحل رشد و توسعه‌ی ریاضی ـ از ابتدایی‌ترین رویارویی با اعداد تا موضوعات پیشرفته‌ای از قبیل حسابان ـ وجود دارند، ضروری است که برای درک بهتر یادگیری و تدریس ریاضی، فرآیند تجرید را مطالعه کنیم» (ص۲۳۵). در این‌جا به نظریه‌ی تبیین شده توسط تال و گری که به نقش نمادها و ارتباط آن با مفاهیم ریاضی، بستگی بیش‌تری دارد اشاره می‌کنم. تال (۱۹۹۶)، در معرفی آن، اظهار می‌دارد «با الهام گرفتن از متفکرانی چون دوبینسکی و اسفارد، که در

تال (۱۹۹۶) معتقد است که رویه‌ها، به اشخاص امکان انجام دادن ریاضی را می‌دهند. اما یادگیری تعداد زیادی از رویه‌ها و انتخاب مناسب‌ترین آن‌ها برای هدف خواسته شده، به‌طور فزاینده‌ای مشکل‌آفرین و خسته کننده می‌شود. در حالی که فرهوم، نه تنها به شخص امکان انجام گام‌به‌گام عملیات (رویه) را می‌دهد، بلکه به او اجازه می‌دهد که نمادها را به‌عنوان اشیای ذهنی ببیند

زمینه‌ی رشد شناختی فرآیندها و مفهوم‌های ریاضی مطالعه کرده‌اند، من این توفیق را یافتم که با تشریک مساعی با ادی گری دیدگاهی را توسعه دهم که نه تنها برای تحلیل چگونگی استفاده‌ی افراد از نمادگذاری، بلکه برای تحلیل چگونگی تعامل با دست‌ورزی نمادین کامپیوتر نیز مفید است» (ص۱۸).

تال و گری معتقدند نمادها، نقش دوگانه‌ای بین فرآیند و مفهوم بازی می‌کنند و ترکیب این دو، نیروی عظیم یادگیری مفاهیم ریاضی را موجب می‌شود (شکل زیر).

$$\text{symbol}\ \begin{array}{l} \longrightarrow \text{process} \\ \longrightarrow \text{concept} \end{array} \Bigg\}\ \text{procept}$$

مطابق شکل بالا، فرهوم[۶] از ترکیب دو کلمه‌ای فرآیند و مفهوم حاصل شده است. به عقیده‌ی تال و گری یادگیری افراد و انجام دادن ریاضی می‌تواند تحت تأثیر هر یک از موارد بالا انجام شود که این هم یادگیری‌های متفاوتی را به دنبال خواهد داشت؛ مانند یادگیری در سطح رویه‌ای، فرآیندی و فرهومی.

رویه، فرایند و مفهوم

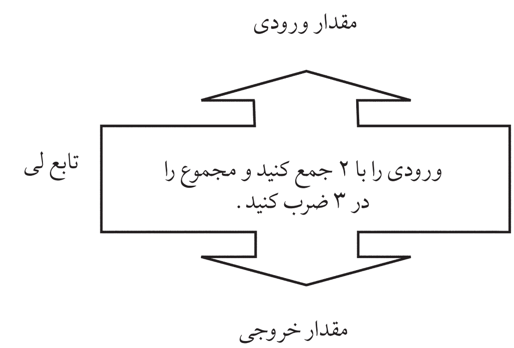
گری (۲۰۰۲)، دریافته است که «نمادها برای مردمان متفاوت، چیزهای متفاوتی معنی می‌دهند. هم‌چنین نمادها برای یک شخص در زمان‌های مختلف توسعه‌ی شناختی‌اش نیز، معانی مختلفی می‌دهند. بعضی‌ها نمادها را جهت فراخواندن رویه‌های غیرمنعطف برای حل مسائل خاص می‌بینند و بعضی دیگر نیروی عظیم‌تر و انعطاف‌پذیرتری را در استفاده از نمادها ـ هم به‌عنوان فرآیند انجام دادن ریاضی و هم به‌عنوان مفهومی برای فکر کردن در مورد آن ـ در خود ایجاد می‌کنند» (ص۲۰۵ و ۲۰۶). در جملات بالا گری به خوبی تفاوت **تفکر رویه‌ای** و **فرهومی** را در به‌کارگیری نمادها عنوان کرده است. تال و همکاران (۲۰۰۱) هم در توصیف رویه و فرآیند بیان می‌کنند که کلمه‌ی **رویه** به معنی دنباله‌ی خاصی از گام‌های مورد استفاده است که در هر زمان، تنها یک گام را اجرا می‌کند. اما اصطلاح فرآیند در مفهوم کلی‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد و شامل هر تعداد رویه‌هایی است که اساساً «نتیجه‌ی یکسانی دارند». برای مثال، فرآیند دیفرانسیل گیری تابع $\frac{1+x^2}{x^2}$ می‌تواند به وسیله‌ی رویه‌های گوناگون از جمله قاعده‌ی خارج قسمت، قاعده‌ی ضرب (برای $\frac{1}{x^2}$ و x^2+1) یا استراتژی‌های دیگری از قبیل ساده کردن به صورت $x^{-2}+1$ قبل از دیفرانسیل گیری انجام شود. به همین دلیل تال (۱۹۹۶) معتقد است که رویه‌ها، به اشخاص امکان انجام دادن ریاضی را می‌دهند. اما یادگیری تعداد زیادی از رویه‌ها و انتخاب مناسب‌ترین آن‌ها برای هدف خواسته شده، به‌طور فزاینده‌ای مشکل‌آفرین و خسته کننده می‌شود. در حالی که فرهوم، نه تنها به شخص امکان انجام گام‌به‌گام عملیات (رویه) را می‌دهد، بلکه به او اجازه می‌دهد که نمادها را به‌عنوان اشیای ذهنی ببیند. بدین‌ترتیب او نه تنها می‌تواند ریاضی را انجام دهد بلکه می‌تواند در مورد مفهوم‌ها نیز فکر کند. دمارویس[۷] (۲۰۰۶) هم در ارتباط با تفاوت تفکر فرهومی با تفکر رویه‌ای اظهار می‌دارد «تفکر فرهومی، فکر کردن در مورد یک مفهوم مانند تابع هم به‌عنوان فرآیند و هم به‌عنوان شیء است و در مقابل آن، تفکر رویه‌ای است که وابسته به انتخاب و انجام رویه‌های مناسب است» (ص۲).

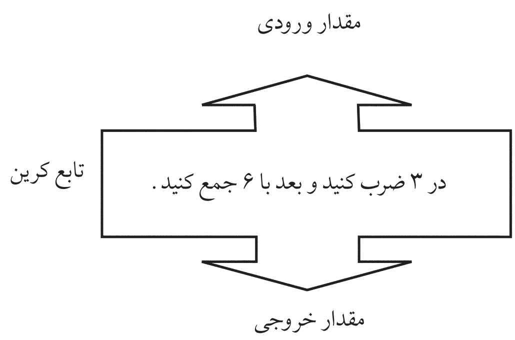
رویه، فرایند و مفهوم در حساب، جبر و حسابان

تال (۱۹۹۶) در توصیفی ساده با ذکر مثال‌هایی از حساب،

جبر و حسابان، فرآیند و مفهوم را در ارتباط با نمادها چنین بیان می‌کند «همه‌ی نمادها با نمایش یک فرآیند ریاضی که باید انجام شود و نیز نتیجه‌ی آن فرآیند، نقش دوگانه‌ای را ایفا می‌کنند. به‌عنوان مثال، ۴+۵ فرایند جمع را برای پدید آوردن مفهوم مجموع ۴+۵ که ۹ است تداعی می‌کند، $3a + 2b$ هم یک فرآیند ارزشیابی و مفهوم یک عبارت جبری است. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ فرآیند ارزشیابی یک مجموع نامتناهی برای یافتن مقدار حدی است (که عبارت است از $\frac{\pi^{2}}{6}$)» (ص۱۸).

تال و همکاران (۲۰۰۱) با ذکر مثالی از کار تحقیقی دمارویس (۱۹۹۸)، به تفاوت‌های رویه، فرآیند و فرهوم در جبر می‌پردازند. آن‌ها نقل می‌کنند که دمارویس (۱۹۹۸) از سه دانش‌آموز با توانایی‌های مختلف خواست تا با در نظر گرفتن تابع کرین و لی، فرم جبری آن‌ها را بنویسند و پاسخ دهند آیا دو تابع مساویند یا خیر و علت آن ها را توضیح دهند.





گری (۲۰۰۲)، دریافته است که «نمادها برای مردمانِ متفاوت، چیزهای متفاوتی معنی می‌دهند. هم‌چنین نمادها برای یک شخص در زمان‌های مختلفِ توسعه‌ی شناختی‌اش نیز، معانی مختلفی می‌دهند

جدول ۱. نتایج حاصل از تحقیق دمارویس (۱۹۹۸)

آیا توابع مساویند؟ چرا؟	تابع لی	تابع کرین	دانش‌آموزان
بله، اگر ۳ را در تابع لی، پخش کنیم همـان تـابع کرین به‌دست می‌آید.	۳(x+۲)	۳x+۶	قوی
بله، اما فرآیندها مختلف است.	(x+۲)۳	x۳+۶	متوسط
خیر، زیرا اگرچه پاسخ‌ها یکسانند، اما فرآیندها متفاوتند.	x+۲(۳)	۳x+۶	ضعیف

تال و همکاران (۲۰۰۱)، از این پاسخ‌ها نتیجه گرفته‌اند که دانش‌آموز قوی روش دست‌ورزی جبری را دانسته و به همین دلیل، این دانش‌آموز در سطح فرهومی عمل کرده است. در حالی که دانش‌آموز متوسط نمادگذاری جبری غیر استاندارد ـ اما به وضوح با معنی ـ را به کار برده است اما فرآیندها را مختلف فرض کرده است و عملکرد وی در سطح فرآیندی است و بالاخره عملکرد دانش‌آموز ضعیف در سطح رویه‌ای ارزیابی شده است.

اما در مورد حسابان، وضعیت پیچیده‌تر از جبر و حساب است. زیرا دانش‌آموزان درگیر فرآیندهایی هستند که بالقوه نامتناهی‌اند. به‌طور مثال گری (۲۰۰۲) بیان می‌کند «دانش‌آموزان اعداد اعشاری نامتناهی را (مثلاً $\frac{\pi^{2}}{6}$) به عنوان فرآیندهایی می‌بینند که پیوسته ادامه دارد و هرگز پایان نمی‌یابد و آن‌ها را به عنوان کمیت‌های نامناسب که محاسبه‌ی آن‌ها هرگز پایان نمی‌یابد، تلقی می‌کنند» (ص۲۱۲). علاوه بر این، نمادهایی مانند $\frac{dy}{dx}$، از یک طرف بیانگر فرآیند دیفرانسیل گیری و از طرف دیگر نمایان‌گر مفهوم مشتق است که حرکت منعطف بین این دو حالت (ایجاد تفکر فرهومی) برای بسیاری از دانش‌آموزان مشکل است. یا نماد

در جبر و حسابان و انواع فرهوم‌ها در این حوزه‌ها و با دانستن این‌که در گذر از حساب به جبر و جبر به حسابان، فرهوم‌های جدید رخ می‌دهد، توجه به گسستگی‌های شناختی دانش‌آموزان که ممکن است در مسیر این حرکت رخ دهد، اهمیت زیادی دارد

$\int f(x)dx$ هم معرفی کننده‌ی فرآیند انتگرال‌گیری است و هم نشان‌دهنده‌ی مفهوم انتگرال است که دسترسی به مفهوم آن دشوارتر است. در واقع، به گفته‌ی تال و همکاران (۲۰۰۱)، به‌کارگیری هر دوی فرآیند و مفهوم در مقابل رویه‌ها، فرد را قادر می‌سازد که روی ویژگی‌های اساسی نمادگذاری تأکید کند و برای یادگیری تکالیف جدید، فشار زیادی متحمل نشود.

با توجه به تفاوت‌های ذکر شده در جبر و حسابان و انواع فرهوم‌ها در این حوزه‌ها و با دانستن این‌که در گذر از حساب به جبر و جبر به حسابان، فرهوم‌های جدید رخ می‌دهد، توجه به گسستگی‌های شناختی دانش‌آموزان که ممکن است در مسیر این حرکت رخ دهد، اهمیت زیادی دارد که به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. تال و همکاران (۲۰۰۱) در توصیف گذر از حساب به جبر بیان می‌کنند «برای بسیاری از دانش‌آموزان، علامت تساوی‌ها در یک معادله مانند ۵=۲+۳ به‌عنوان فرآیندی از چپ به راست دیده می‌شود که سمت چپ، سمت راست را نتیجه می‌دهد. دانش‌آموزان با چنین تعبیری شاید قادر به حل معادله‌ای نظیر $3x+1=16$ باشند و استدلال کنند که $3x+1$ می‌شود ۱۶. پس $3x$ برابر با ۱۵ است و x می‌شود ۵. اما معادله‌ی $3x+1=4x-4$ با معادله‌ی قبلی متفاوت است» (ص۱۴). گری (۲۰۰۲)، در توصیف چنین معادلاتی ابراز می‌دارد: «دانش‌آموزانی که عمدتاً نمادگذاری را یک حرکت فرآیندی می‌بینند شاید آن را به‌عنوان دو فرآیند مختلف بخوانند و تصور کنند که آن‌ها باید مساوی باشند، اما این دو، فرآیندهایی نیستند که مساوی باشند، بلکه مفاهیمی هستند که توسط دو ارزشیابی ایجاد می‌شوند» (ص۲۱۰).

تال و همکاران (۲۰۰۱)، در ادامه‌ی این مطلب توضیح می‌دهند «در روبه‌رو شدن با چنین مسائلی، بسیاری از دانش‌آموزان بر رویه‌های یادگرفته شده برای رسیدن به پاسخ، از قبیل «تغییر دو طرف و تغییر علامت»، «حرکت دادن اعداد به سمت راست» «حرکت دادن x ها به سمت چپ» و «تقسیم دو طرف بر ضریب x» تمرکز می‌کنند. در واقع دانش‌آموزان ممکن است به لحاظ رویه‌ای، قادر به انجام دادن ریاضی باشند. در حالی که به‌طور رابطه‌ای، آن را درک نمی‌کنند» (ص۱۴ و ۱۵).

به همین دلیل است که گذر از جبر به حسابان، باعث بروز مشکلات جدیدی برای آن‌ها می‌شود. مثلاً نمادهای $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\lim_{x\to 2}(\frac{x^2-4}{x-2})$، همه فرآیندهای بالقوه نامتناهی دارد و به نظر می‌آید که «پیوسته ادامه دارند» و شاید هرگز به مقدار حد نرسند. به عقیده‌ی بندر (۱۹۹۶)، برای یک عبارت جبری مشابه $a+b$ این ماهیت دوگانه (یعنی هم متقاضی فعالیت بودن و هم نتیجه‌ی آن فعالیت) شناخته شده و مفید است. اما زمانی‌که این فعالیت شامل فرآیندهای نامتناهی می‌شود، به شکست می‌انجامد. در نتیجه دانش‌آموزان از نظر خودشان درست می‌گویند که از پذیرش درستی تساوی $\frac{1}{3}=0/\overline{3}$ و $1=0/\overline{9}$ امتناع می‌کنند. آن‌ها بخش پویای ماهیت دوگانه‌ی حد را جدی می‌گیرند و به درستی، ورود به یک فرآیند نامتناهی را که در عباراتی مانند $0/\overline{9}$ وجود دارد و به مقدار حد منجر می‌شود، رد می‌کنند (ص ۷۲). تال (۱۹۹۶)، درتوضیح بیش‌تر ماهیت‌های دوگانه، به نکته‌ی ظریفی اشاره می‌کند که توجه به آن حائز اهمیت است. به گفته‌ی وی مثلاً «برای کودکی که به مجموع ۷=۴+۳ تنها به عنوان یک رویه‌ی شمارش نگاه می‌کند که در آن ۴ به اضافه‌ی ۳ عدد ۷ را می‌سازد، ممکن است دشوار باشد از عهده‌ی نمادی مانند $3x+4$ برآید که هیچ چیزی را نمی‌سازد، مگر این‌که شاید قسمت ۳+۴ را انجام دهد که برایش معنایی دارد و $7x$ را به دست آورد. این موضوع باعث سردرگمی شدید بسیاری از دانش‌آموزانی می‌شود که شروع به یادگیری جبر می‌کنند. همین‌طور، برای دانش‌آموزی که به «انجام دادن»

ریاضی با تعداد متناهی دستورالعمل عادت دارد، ممکن است دشوار باشد که با بی نهایت بالقوه در فرآیند حد کنار بیاید و ممکن است فکر کند که در پناه الگوریتم های نمادین در حسابان و انجام آن ها، دست کم می تواند به یک «پاسخ» برسد» (ص ۲۰).

بنابراین نمادها نه تنها با چهره های متفاوتی از طرف دانش آموزان بازخوانی می شود بلکه برای آن ها معانی متفاوتی هم خواهد داشت. لذا، درک نمادین و انجام فعالیت های مناسب با نمادها برای بسیاری از دانش آموزان، کار ساده ای نیست. علاوه بر این، با توسعه ی ریاضی و وارد شدن مفاهیم و مطالب جدید، به حوزه ی یادگیری دانش آموزان نمادهای جدیدی اضافه می شود که برقراری ارتباط بین این نمادها و مفاهیم جدید ضرورت بیش تری پیدا می کند و عمل یادگیری را مشکل تر می سازد. همان گونه که می بینیم، دانش آموزان اعمال حسابی را بهتر از اعمال جبری انجام می دهند و در مسیر حرکت به سمت حسابان با دشواری های بیش تری مواجه می شوند.

جمع بندی

همان گونه که اشاره شد، بیش تر مفاهیم ریاضی از جمله ریاضیات مدرسه ای (حساب، جبر، حسابان و هندسه)، در بسترهای واقعی شکل گرفته اند و به مرور زمان، چون به کارگیری مفاهیم در قالب کلمات و الفاظ و حتی نمودارها، مشکل و وقت گیر بوده است، افراد مختلف در طول تاریخ نمادها را به خدمت گرفته اند و برای بیان مفاهیم ریاضی از نمادها استفاده کرده اند. امروزه قدرت ریاضی وابسته به نمادگذاری است و برای انجام دادن ریاضی مجبوریم زبان نمادها را به کار ببریم. از طرف دیگر، با به کارگیری نمادها، دسترسی به مفاهیم مربوط به آن ها هم مشکل می شود و به راحتی نمی توان، به همین سادگی که نمادها را به کار می بریم، مفاهیم را درک کنیم. لذا تحقیقات بسیاری از محققان حوزه ی آموزش ریاضی در این راستا بوده است که چگونه می توان پیوند معنادار و محکمی بین نمادها و مفاهیم آن ایجاد کرد. بنابر یافته های ذکر شده در این مقاله و پژوهش های دیگر، مفاهیم ریاضی و از جمله جبر و حسابان، تنها با بازنمایی نمادین و یا حتی زبان رسمی به کار رفته در آن ها قابل دسترسی نخواهد بود و دانش آموزان به سختی می توانند با صورت های نمادی مفاهیم ریاضی کنار آیند، مگر این که برای این نمادها قالب های ساده تر و ملموس تری توصیف کنند.

هم چنان که قبلاً ذکر شد، روند تجرید مفاهیم ریاضی از دیدگاه محققان مختلف، مراحل مختلفی را طی می کند که در اینجا به ایده ی فرهوم از تال و گری اشاره شد. به موازات این ها، محققان دیگر هم نظریه های مشابهی را تبیین کرده اند که هر یک، دسترسی به مفاهیم ریاضی از جمله حسابان را از زوایای متفاوتی توصیف کرده اند و در نوع خود، مفید و با اهمیت هستند. به عنوان مثال، کانفری و اسمیت (۱۹۹۴)، دیدگاه «معرفت شناسی و بازنمایی های چندگانه[۳۰]» را در ارتباط با تجرید پیشنهاد کرده اند. براساس این دیدگاه، رشد و توسعه ی ریاضی در تناظر و هماهنگ با بازنمایی چندگانه قرار دارد. بدین معنی که دانستن بخشی از ریاضی، انجام دادن عمل ریاضی به شکل بازنمایی های متفاوت است و سپس هم سنگ کردن و مقایسه ی این شکل ها به منظور برطرف کردن موقعیت های پیچیده می باشد. آن ها این وضعیت را مشابه حرکت های پاندولی می دانند که نوسان های زیادی دارد و دریافت های تکمیلی و معتبرتری را می تواند عرضه کند.

در حسابان به خوبی می توان چنین بستری را فراهم آورد و مفاهیم آن را می توان به شکل های مختلفی در بازنمایی های عددی، جبری و نموداری بیان کرد و با حرکت منعطف بین این بازنمایی ها و انواع دیگر آن، گامی مهم در یادگیری هرچه بهتر مفاهیم آن برداشت و مفاهیم کلیدی حسابان را از دام وابستگی به نمادها رهایی بخشید. علاوه بر این، آشنایی هرچه بیش تر معلمان ریاضی با نظریه ها و ایده های جدید، موجب می شود که آن ها به روش ها و قالب های سنتی و فرسوده ی به جامانده اکتفا نکنند و در کلاس های درس، میدان فکری وسیع تری را برای دانش آموزان خود ترسیم کنند.

* این مقاله از فصل دوم پایان نامه با عنوان «بسترهای لازم برای یاددهی و یادگیری مفاهیم حسابان در برنامه ی درسی مدرسه ای» گرفته شده است که با راهنمایی خانم دکتر زهرا گویا نگارش یافته است.

پی‌نوشت

1. Pimm
2. Skemp
3. Drayfus
4. Dubinsky
5. White & Mitchelmore
6. Procept

این کلمه، از ترکیب دو کلمه‌ی Process (فرآیند) و Concept (مفهوم) درست شده است.

7. Demarois
8. Epistemology & Multiple Representation

منابع

1. Akkoc, Hf. & Tall, D. (2003). The Function Concept: Comprehension And Complication.

2. Bagni, Gt. (2003). Historical Roots of Limit Notion. Development, **Canadian Journal of Sciene, Mathematics and Technology Education.**

3. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concept, 8th International congress on Mathematics Education (ICME 8). Selected Lecture, Sevilla, 14-21.

4. Comfrey, J. &. Smith, E. (1994). Comments on James Kaputs Chapter "Democratizing Access to Calculus: New Routs to Old Roots".

5. Gray, E. (2002). Processes and Concept as "False Friends" In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence, Learning and Understanding Mathematics**, 205-217, Post Pressed, Flaxton Australia.

6. Kaput, J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited byt A.H. Schoenfeld.

7. Mc Donald' M.A. Mathews, D.M. & Strobe, K.H. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Tow Objects. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & Kaput (EDS), **Research in Collegiate. Mathematics Education** IV, (PP. 77-102), Providence, RI: American Mathematical Society.

8. Pimm, D. (2002). The Symbol Is and Isn't The Objects. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 257-271 Post Pressed Flaxton Australia.

9. Demarois, P. (2006). **Begining Algebra Student's Image of Function Concept.**

10. Skemp, R.R. (1989). **Mathematics in the Primary School**. London: Rout Iedge.

11. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 151-157, Post Pressed, Flaxton Australia.

12. Tall, D. (1994). **Cognitive Difficulties in Learning Analysis.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

13. Tall. D. (1995). **Understanding the Calcules**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

14. Tall, D. & Gray, E. & Ali, M. B. & Crowley, L. & De Marois, P. & McGrowen, M. & Pitta, D. & Pinto, M. & Thomas, M. & Yusuf, Y. (2001). **Symbols and The Bifurcation Between Procedural and Concept Thinking.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

15. White, P. & Michelmore, M. (2002). Teaching and Learning Mathematics by Abstraction. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and understanding Mathematics**, 235-255, Post Pressed, Flaxton Australia.

۱۶. آرتیگ، میشل؛ دی یرم، آلوپ (۱۹۹۶). آموزش و یادگیری آنالیز مقدماتی، ترجمه‌ی علیرضا مدقالچی. (۱۳۷۹ ـ ۱۳۸۰). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۵۷، صص ۲۳ تا ۳۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۷. شهریاری، پرویز (۱۳۸۰) **سرگذشت ریاضیات**. نشر مهاجر.

۱۸. فرودنتال، هانس. (۱۹۷۹). ریاضی جدید یا آموزش جدید. ترجمه‌ی زهرا گویا و سحر ظهوری زنگنه (۱۳۸۱). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۰، ص ۲۹. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۹. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها، امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی. (۱۳۷۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.