«تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم»
برای
مفهوم «تابع»*

مهدی جوادی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

«تعریف مفهوم» عبارتی است که برای مشخص کردن آن مفهوم مورد استفاده قرار می‌گیرد

مقدمه

«اولین حقیقتی که شاید ما را متحیر کند (در صورتی که پذیرفتن آن برایمان عادی نشده باشد) این است که چطور ممکن است افرادی وجود داشته باشند که ریاضیات را نمی‌فهمند؟

اگر ریاضیات چیزی جز یک‌سری قوانین منطقی نیست، که توسط هر انسان عاقلی پذیرفته می‌شود، و اگر استدلال‌های آن براساس یک‌سری اصول است که برای همه‌ی انسان‌ها واضح است و هیچ‌کسی نمی‌تواند آن‌ها را منکر شود مگر این‌که دیوانه باشد، پس چه‌طور ممکن است بسیاری از افراد باشند که برای آن‌ها ریاضیات کاملاً مبهم باشد و آن را درک نکنند؟»

(هانری پوانکاره، ۱۹۰۸)

از نظر گیرالدو (۲۰۰۶)، یکی از چالش‌برانگیزترین جنبه‌های آموزش ریاضی این است که می‌خواهد شاخه‌هایی از دانش را مانند سازوکارهای ذهنی انسان و قوانین بی‌عیب و مستدل منطقی، کنار هم قرار دهد. به گفته‌ی او، روش‌های سنتی آموزش ریاضی اغلب براساس فرضیاتی به نظر بدیهی پایه‌ریزی می‌شوند؛ فرضیاتی هم‌چون این‌که «اگر این موضوع با وضوح کافی بیان شود، دانش‌آموزان آن را خواهند فهمید» یا «اگر آن‌ها معنای همه‌ی کلمات را در یک تعریف بدانند، معنای ریاضی مفاهیم تعریف شده را نیز خواهند فهمید».

پی‌آمد چنین روش‌هایی این است که بعضی از نظام‌های آموزشی، تلاش می‌کنند تا یک ساختار نظری رسمی سلسله‌مراتبی را که با اصول موضوع شروع شده و به‌ترتیب تعاریف، گزاره‌ها و قضایا را شامل می‌شود، اجرا کنند.

به این نوع رویکرد سنتی به آموزش ریاضیات شاید بتوان عنوان رویکرد صوری را اطلاق کرد.

به گفته‌ی هنا[1] (۱۹۸۳)، «در ریاضیات مدرسه‌ای، حرکتی با عنوان ریاضیات جدید در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰ آغاز شد و بین سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۶۵، این حرکت به اوج خود رسید. این حرکت، علاوه بر قرار دادن حوزه‌های بسیار مجردی از ریاضیات مدرن در ریاضیات مدرسه‌ای، تأکید بسیار زیادی بر ریاضیات به‌عنوان یک ساختار اصل موضوعی داشت و بر منطق و اثبات، تأکید ویژه‌ای می‌نمود» (نقل شده در خسروشاهی، ۱۳۸۶).

به عنوان مثال، آیزنبرگ[2] (۱۹۹۱) نقل می‌کند که «در دهه‌ی ۱۹۶۰ در جنبش ریاضیات جدید، پیشنهاد شد که مفهوم تابع به‌عنوان یک عامل متحدکننده (مانند نخ تسبیح[3]) در ریاضیات مدرسه‌ای به‌کار گرفته شود. اما این مسئله باعث شد که اساتید بانفوذی چون آدلر[4] (۱۹۶۶)، بیرمن[5] (۱۹۵۶)، بگل[6] (۱۹۶۸)

و فر[7] (۱۹۶۶)، یک رویکرد صوری (رسمی) به توابع را وارد کلاس‌های درس کنند. هشدارهایی از جانب دیگران هم‌چون کلاین[8] (۱۹۵۸)، مک لانس[9] (۱۹۶۵)، ویلدر[10] (۱۹۶۷) و باک[11] (۱۹۷۰)، در ابتدا با بی‌توجهی مواجه گردید، تا این‌که دیده شد این رویکرد منطقی به برنامه‌ی درسی، فاقد کارایی است و به‌درد نمی‌خورد» (ص ۱۴۰).

تال (۱۹۸۸) معتقد است که این رویکرد صوری / ساختاری به ریاضیات، نه‌تنها باعث اصلاح یادگیری ریاضیات نشد، بلکه مشکلات تشدید شدند و تحلیلی دقیق نشان داد که این مشکلات از کندذهنی و بی‌علاقگی دانش‌آموزان نیست؛ بلکه یک واکنش طبیعی انسانی است که نسبت به این نوع تجرید، ایجاد می‌شود.

از نظر گیرالدو (۲۰۰۶)، یکی از چالش‌برانگیزترین جنبه‌های آموزش ریاضی این است که می‌خواهد شاخه‌هایی از دانش را مانند سازوکارهای ذهنی انسان و قوانین بی‌عیب و مستدل منطقی، کنار هم قرار دهد

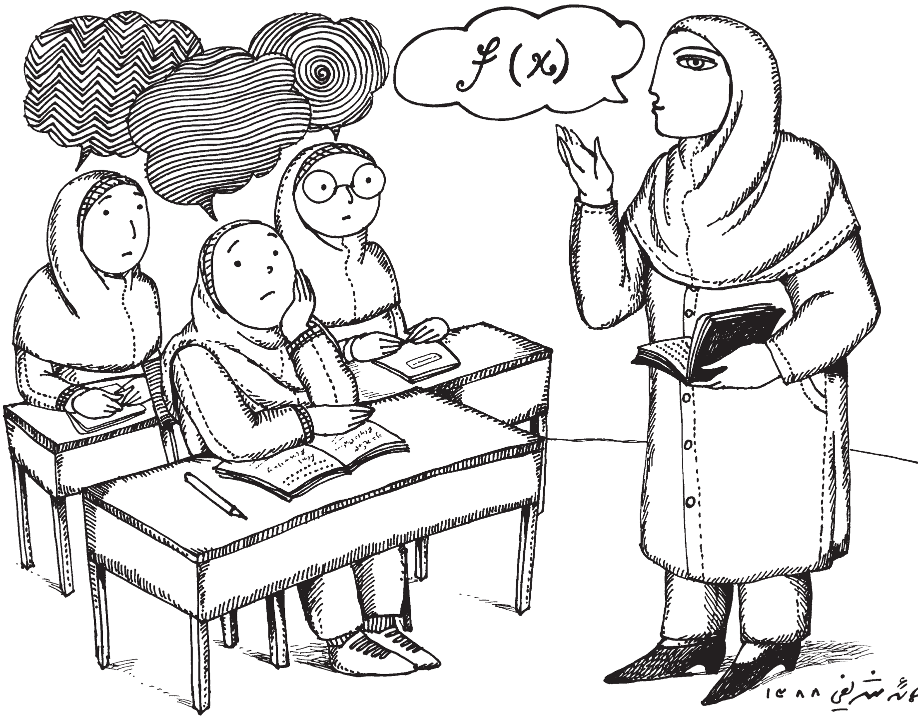
به گفته‌ی گیرالدو[12] (۲۰۰۶)، شکست این رویکرد باعث شد تا ریاضی‌دان‌ها و معلمان ریاضی به سمت پاسخ دادن به این سؤال بروند که «چه‌طور ممکن است افرادی وجود داشته باشند که ریاضیات را نمی‌فهمند؟» علاوه بر این، این مسئله موجب شد تا محققان و جامعه‌ی آموزشی به‌دنبال مدل‌های مؤثر جایگزین برای رویکردهای تدریس باشند، زیرا به گفته‌ی وینر[13] (۱۹۹۱)، «تدریس باید فرآیندهای روان‌شناختی رایج نسبت به یادگیری یک مفهوم و چگونگی ارائه‌ی استدلال منطقی توسط دانش‌آموزان را مورد توجه قرار دهد. لذا لازم است که برای طراحی پداگوژی مناسبی برای تدریس ریاضی، نه‌تنها این مسئله را مورد بررسی قرار داد که انتظار معلم از یادگیری مفاهیم ریاضی چیست، بلکه ضروری است که مطالعه شود که چگونه دانش‌آموزان این مفاهیم را یاد می‌گیرند».

پرداختن به این مسئله که دانش‌آموزان چگونه یاد می‌گیرند، محققان را به سمت تحلیل ساختارشناختی ذهن می‌کشاند و نیاز به داشتن مدل را برای تبیین رفتار ریاضی دانش‌آموزان که به قول هارل[14] (۲۰۰۴) یکی از موارد ضروری در تحقیقات بنیادین حوزه‌ی آموزش ریاضی به‌شمار می‌رود، ایجاد می‌کند. در این راستا، تال و وینر (۱۹۸۱) با تمایز قائل شدن بین نوع تفکر فرد نسبت به یک مفهوم و تعریف رسمی آن، ایده‌ی «تصور مفهوم»[15] و «تعریف مفهوم»[16] را ارائه کردند که به عقیده‌ی هارل (۲۰۰۴)، این مدل ابزاری در اختیار آموزش‌گران ریاضی قرار می‌دهد تا به‌کمک آن، به توصیف پاره‌ای از عواملی بپردازند که در تدریس و یادگیری ریاضی، نقشی تعیین‌کننده دارند. این مدل، حاصل درس‌های عمده‌ای است که آموزش‌گران ریاضی از نتایج تحقیقات دهه‌های گذشته به‌دست آورده‌اند. وی در ادامه توضیح می‌دهد که آن‌ها با تمایز قائل شدن بین نوع تفکر فرد از یک مفهوم و تعریف رسمی آن، در واقع بین ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت ذهنی و ریاضیات به‌عنوان یک دستگاه صوری، تمایز قائل شدند. برای روشن‌تر شدن این ادعا، از توجیهی که تال و وینر (۱۹۸۱) در مورد مدل مفهومی خود ارائه داده‌اند کمک می‌گیریم. آن‌ها ابراز می‌دارند که

«مغز انسان یک واحد منطقی صرف نیست و شیوه‌ی پیچیده‌ی کارکرد آن غالباً با منطق ریاضی متفاوت است. لذا این منطق صرف نیست که به ما بینش می‌دهد. شانس را هم نمی‌توان تنها عاملِ بروز اشتباهات ذهنی قلمداد کرد... ما از اصطلاح «تصور مفهوم» برای توصیف ساختارشناختی کلی‌ای که با یک مفهوم در پیوند است استفاده می‌کنیم که تمامی تصاویر ذهنی و ویژگی‌ها و فرآیندهای مرتبط با آن مفهوم را دربرمی‌گیرد. تصور مفهوم به مرور زمان و در جریان مواجه شدن با انواع تجارب شکل می‌گیرد و تحت تأثیر محرک‌های جدید تغییر می‌کند و رشد می‌یابد... رشد و گسترش تصور مفهوم لزومی ندارد که به‌طور منسجم و به یک‌باره اتفاق بیفتد. درواقع، مغز بدین صورت کار نمی‌کند. دریافت‌های حسی متفاوت، مسیرهای عصبی خاصی را برانگیخته می‌کنند و در عین حال، از برانگیخته شدن سایر مسیرها ممانعت به‌عمل می‌آورند. بدین‌ترتیب، محرک‌های متفاوت می‌توانند به فعال شدن بخش‌های متفاوتی از تصور مفهوم منجر شوند» (تال و وینر، ۱۹۸۱).

به همین دلیل، ممکن است در زمان‌های متفاوتی، دیدگاه‌های ناسازگاری در ذهن فرد به وجود بیاید که تا زمانی که آن‌ها به‌طور هم‌زمان فراخوانده شوند، وی از این ناسازگاری‌ها آگاه نیست.

تال (۱۹۹۱) معتقد است که این مدل به همان اندازه که در دانش‌آموزان در حال یادگیری و رشد کاربرد دارد، در مورد ریاضی‌دانان حرفه‌ای نیز کارایی دارد. او اظهار می‌دارد که یک ریاضی‌دان نیز مصون از این ناسازگاری‌های درونی نیست؛ ولی



قادر است بخش‌های بزرگی از دانش را در دنباله‌ای از یک استدلال استنتاجی به هم پیوند دهد. برای چنین شخصی، دسته‌بندی این دانش در یک روش ساختاریافته‌ی منطقی، به نظر آسان می‌آید و این سبب می‌شود که آن ریاضی‌دان، این دانش را که در آن منطقْ موضوع برجسته‌ای می‌باشد، برای ارائه به دانش‌آموزان مفید بداند.

از سوی دیگر، تعریف یک مفهوم مطلب دیگری است. «تعریف مفهوم» عبارتی است که برای مشخص کردن آن مفهوم مورد استفاده قرار می‌گیرد (تال و وینر، ۱۹۸۱).

این تمایز واضح، زمانی آشکار می‌شود که پیچیدگی شناختیِ مفهوم قدرتمندی مانند تابع مورد تحلیل قرار گیرد. تعریف مفهوم یک تابع ممکن است این طور باشد که «یک رابطه بین دو مجموعه‌ی A و B که در آن هر عضو A تنها با یک عضو B مرتبط می‌شود». اما برخورد با این مفهوم، جنبه‌های دیگری را نیز دربرمی‌گیرد. برای مثال، ممکن است یک تابع به‌عنوان یک عمل که برای هر عنصر x در A یک عنصر f(x) را در B تعیین می‌کند، یا به‌عنوان یک نمودار، یا به‌عنوان یک جدول مقادیر در نظر گرفته شود.

تجربیات و برخوردهای فرد در یک زمینه‌ی خاص، ممکن است باعث شود تصوری که او از یک تابع ساخته است به گونه‌ای باشد که وی، تابع را همواره به‌عنوان یک فرمول و یا شاید بیش‌تر از یک فرمول و با تعدادی متناهی فرمول در بخش‌های مختلف، در نظر بگیرد.

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات جدید به شمار می‌رود که به طور کامل، در تمامی حوزه‌ها وارد شده است. اما با وجود پایه‌ای بودن این مفهوم در ریاضی، تحقیقات نشان می‌دهد که یکی از مشکل‌ترین مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای، تابع است

از نظر تال (۱۹۸۸)، معقول نیست که انتظار داشته باشیم دانش‌آموزان به‌طور کاملاً منطقی، از تعاریف مفهوم صحبت کنند، بدون این که تصورات مفهومی خود را دخالت دهند. او به نقل از وینر (۱۹۸۳) ادعا می‌کند که؛

«۱) برای دست‌ورزی با مفاهیم، فرد نیاز به یک تصور مفهوم دارد نه یک تعریف مفهوم.

۲) تعاریف مفهوم (زمانی که مفهوم توسط یک تعریف بیان شده باشد) غیرفعال باقی خواهند ماند و حتی ممکن است به فراموشی سپرده شوند. اما در فرآیند فکر کردن، این تصور مفهوم است که همیشه فراخوانده می‌شود» (ص ۴).

تال (۱۹۸۸) اظهار می‌دارد که با چنین ادعایی، ممکن است این سؤال مطرح شود که «چه‌طور در بین انواع مختلفی از تصورات مفهوم، یک روشِ مشخص می‌توان ارائه کرد که باعث رشد و پیشرفت در یادگیری و یاددهی ریاضیات شود؟»

وی در پاسخ بیان می‌دارد که تنوع تصورات مفهوم در فرد، نشان می‌دهد که پیش بردن دانش ریاضی به یک روش رسمی، به سادگی امکان‌پذیر نیست و جایگزین این روش، دادن فرصت پیدا کردن تجربیات غنی‌تر به دانش‌آموزان است به طوری که آن‌ها

را قادر کند تصورات منسجم‌تری را از یک مفهوم تشکیل دهند.

از نظر تال، این کار به سادگی قابل انجام نیست و دربرگیرنده‌ی ایجاد تعادلی بین انواعی از مثال‌ها و نامثال[17] هاست که هر دو، لازمه‌ی ایجاد تصور منسجمی از یک مفهوم است.

چرا تعریف‌های مفهوم برای دانش‌آموزان قابل استفاده نیستند؟

> **مغز انسان یک واحد منطقی صرف نیست و شیوه‌ی پیچیده‌ی کارکرد آن غالباً با منطق ریاضی متفاوت است. لذا این منطق صِرف نیست که به ما بینش می‌دهد**

به گفته‌ی وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، تمام مفاهیم ریاضی به‌جز مفاهیم اولیه، دارای تعریف رسمی هستند که بسیاری از آن‌ها یک یا چندبار به دانش‌آموزان معرفی می‌شوند. در حالی که معمولاً دانش‌آموزان برای تشخیص اشیای ریاضی مورد بحث به‌عنوان یک مثال یا نامثال از آن مفهوم، عملاً تعریف را استفاده نمی‌کنند و در بسیاری از موارد، بر مبنای یک تصورِ مفهوم، تصمیم می‌گیرند.

آن‌ها هم‌چنین اظهار می‌دارند «تصور مفهوم دانش‌آموز / دانشجو از یک مفهوم، حاصل تجربه‌ی وی با مثال‌ها و نامثال‌هایی از آن مفهوم است. درنتیجه مجموعه‌ی اشیای ریاضی که توسط دانش‌آموز / دانشجو به‌عنوان مثال‌هایی از مفهوم در نظر گرفته می‌شود، الزاماً همان مجموعه‌ی اشیاء ریاضی که توسط تعریف معین می‌شود، نیست. اگر این دو مجموعه یکسان نباشند، ممکن است رفتار [ذهنی] دانش‌آموز / دانشجو با آن‌چه که مورد انتظار معلم است، فرق داشته باشد» (ص ۳۵۶). به منظور ایجاد ارتباط بین این دو مجموعه، لازم است بدانیم که چرا این یکسانی وجود ندارد. درنتیجه، برای رفع این مشکل، بایستی به‌دنبال چرایی چنین اتفاقاتی برویم.

در بین رویکردهایی که برای شناخت ساز و کارهای غالب در یادگیری مفاهیم ریاضی عرضه شده‌اند، یک مدل مفهومی توسط تال و وینر (۱۹۸۱) ارایه شده که شامل دو مجموعه[18] «تصورِ مفهوم» و «تعریف مفهوم» به‌منظور ایجاد تمایز بین این دو است. البته، هم‌چنان که وینر و دریفوس (۱۹۸۹) بیان داشته‌اند، بعضی از مفاهیم ریاضی دارای جنبه‌های گرافیکی قوی‌تری هستند و بعضی دیگر چنین نیستند و این تفاوت، نوع تصورات مفهوم مربوط به آن‌ها را متفاوت می‌کند. مثلاً برای مفاهیمی مانند مفاهیم جبری که دارای جنبه‌ی گرافیکی قوی نیستند، تصورِ مفهوم شامل بازنمایی‌های نمادین یا فرمولی به‌علاوه‌ی مجموعه‌ای از تمام ویژگی‌های مرتبط با آن می‌باشد. در صورتی که مفهوم تابع، علاوه بر جنبه‌های گرافیکی قوی، دارای جنبه‌های غیر گرافیکی قوی نیز هست و به‌عنوان یک مفهوم زیربنایی ریاضی، از پیچیدگی‌های زیادی برخوردار است.

مفهوم تابع در رشته‌ی ریاضی و فیزیک دبیرستان در کتاب‌های ریاضی ۲ (معرفی اولیه)، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بررسی قرار گرفته است.

در کتاب حسابان، برای تعریف مفهوم تابع، ابتدا فرصت‌های متعددی برای ساختن تصوراتی از مفهوم تابع برای دانش‌آموزان فراهم شده است و سپس تعریف رسمی ارائه گردیده است. این نوع ورود به مبحث تابع، هم‌سو با یافته‌های تحقیقی در مورد چگونگی توسعه‌ی مفاهیم ریاضی در دانش‌آموزان / دانشجویان است و با توجه به نقش مرجعی که کتاب درسی در نظام متمرکز آموزشی ایران دارد، می‌توان امیدوار بود که چنین ورودی به مطلب بتواند تصور مفهوم دانش‌آموزان را تقویت کند و زمینه‌ی مساعدی برای فهمیدن تعریف مفهوم فراهم آورد. اما تجربه‌ی تدریس نگارنده نشان می‌دهد که دانشجویان در رابطه با درک مفهوم تابع در دانشگاه، دچار مشکل هستند.

چرا شناخت تصور مفهوم دانش‌آموزان، اهمیت دارد؟

به گفته‌ی آیزنبرگ (۱۹۹۱)، مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات جدید به شمار می‌رود که به طور کامل، در تمامی حوزه‌ها وارد شده است. اما با وجود پایه‌ای بودن این مفهوم در ریاضی، تحقیقات نشان می‌دهد که یکی از مشکل‌ترین مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای، تابع است.

دریفوس و آیزنبرگ[19] (۱۹۸۲) به نقل از بویر[20] (۱۹۴۶) بیان می‌کنند که متخصصان تاریخ ریاضی بیان داشته‌اند که معرفی تابع در قرن ۱۷، اثر بی‌نهایت سودمندی بر رشد و گسترش ریاضیات داشت. آن‌ها دلیل این مسئله را ماهیت یگانه‌ی تابع می‌دانند و مثالی که می‌آورند این است که در بسیاری از برنامه‌های درسی مدرسه‌ای، مفهوم تابع با جبر، مثلثات و هندسه گره خورده است. این مفهوم در تمامی ریاضیات شبیه ریسمانی، ریاضیات مدرسه‌ای را به هم متصل می‌کند.

هم‌چنین، تابع از مفاهیمی است که از جنبه‌های مختلف می‌توان به آن توجه کرد. مثلاً در سطح تعریف، مفهوم تابع را

می‌توان در زمینه‌های متعددی از طریق نمودار، جدول، توصیف جبری یا به‌عنوان یک جعبه‌ی ورودی ـ خروجی، جفت‌های مرتب و مانند این‌ها معرفی کرد. لذا انتظار می‌رود که شناسایی تصورات مفهوم و تعاریف مفهوم دانش‌آموزان/ دانشجویان، به شناخت فهم و درک آن‌ها از تابع کمک کند. هم‌چنین، به سبب این شناسایی، معلمان و مؤلفان کتاب‌های درسی می‌توانند مثال‌ها و نامثال‌های این مفهوم را طوری سازمان‌دهی کنند که تصورات مفهوم دانش‌آموزان به سمت تعریف مفهوم تابع نزدیک و نزدیک‌تر شود.

ما از اصطلاح «تصور مفهوم» برای توصیف ساختارشناختی کلی‌ای که با یک مفهوم در پیوند است استفاده می‌کنیم که تمامی تصاویر ذهنی و ویژگی‌ها و فرآیندهای مرتبط با آن مفهوم را دربرمی‌گیرد

به اعتقاد وینر (۱۹۸۳)، در اهمیت بررسی تصورات و تعاریف مفهوم، می‌توان به این نکته اشاره کرد که گاهی اوقات، وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود به توضیح مفاهیم ساده‌ای مانند زاویه‌ی قائمه، محور مختصات، ارتفاع در یک مثلث و مشابه آن بپردازند، اغلب این مفاهیم اولیه را نمی‌شناسند یا تصورات نادرستی از آن‌ها دارند. وینر، در ادامه توضیح می‌دهد که این تصورات ممکن است نتیجه‌ی برخورد یادگیرنده‌ها با مجموعه‌ی خاصی از مثال‌ها باشد که در آموزش ریاضی مدرسه‌ای به آن‌ها ارائه شده است. بدین جهت، به جای ایجاد تصورات صحیح و غنی از آن مفهوم، برای آن‌ها در حد یک تمثیل باقی مانده است. به این دلیل، آشکار کردن تصورات مفهوم دانش‌آموزان برای تدریس مهم است و کاربردهای مستقیمی در آموزش دارد، زیرا هم برای معلم، شناخت بهتری از دانش‌آموزان و نوع فهم و درک آن‌ها ایجاد می‌کند و هم باعث می‌شود که معلمان، اصلاحاتی در تدریس خود انجام دهند که از شکل‌گیری چنین تصورات مفهومی اشتباه جلوگیری کند. بالاخره توجه و دقت معلم را نسبت به نوع مثال‌هایی که انتخاب می‌کند نیز بیش‌تر می‌کند.

پی‌نوشت

* این مقاله، از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد نگارنده که با راهنمایی دکتر زهرا گویا تدوین شده است، استخراج شده است.

1. Hana
2. Eisenberg
۳. بدین معنی که مفهوم تابع در همه‌جای ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و از دوره‌ی ابتدایی تا پیش‌دانشگاهی، موضوعات مختلف ریاضی را به هم متصل می‌کند.
4. Adie
5. Beberman
6. Begle
7. Fehr
8. Kline
9. Mac Lance
10. Wilder
11. Buck
12. Giraldo
13. Vinner
14. Harel
15. Concept Image
16. Concept Definition
۱۷. non-examples: مثال‌هایی که در تعریف مفهوم مورد نظر نمی‌گنجند.
۱۸. وینر (۱۹۸۳) آن‌ها را با عنوان دو سلول در نظر می‌گیرد.
19. Dreyfus & Eisenberg
20. Boyer

منابع

۱. خسروشاهی، لیلا. (۱۳۸۶). ریاضیات اصل موضوعی؛ قالبی نامناسب، اما موضوعی مناسب برای آموزش. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۸۷، صص ۳۹ تا ۴۷. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

2. Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). ‘Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions’. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, pp. 360-380.

3. Eisenberg, T. (1991). ‘Function and associated learning difficulties’. in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*., Kluwer: Holand, pp. 140-152.

4. Giraldo, V. (2006). ‘Concept images, cognitive roots and conflicts: Building an alternative approach to calculus’. *Presented at Charles University, Prague in Retirement as Process and concept; A festschrift for Eddie Gray and David Tall*, pp. 91-99.

5. Harel, G. (2004). Perspective on "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". *In Carpenter, T., Dossey, J., Koehler, J (Ed.), Classics in Mathematics Education Research*. The National Council of Teachers of Mathematics, INC. pp. 98-108.

6. Poincaré, H. (1908) *Science et Méthode, Kimé,* Paris 1999.

7. Tall D., (1988). ‘Concept Image and Concept Definition’, *Senior Secondary Mathematics Education*, (ed. Jan de Lange, Michel Doorman), OW & OC Utrecht, pp. 37-41.

8. Tall, D. (Ed.), (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holand, pp. 3-21.

9. Tall, D. O. & Vinner, S., (1981). ‘Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity’, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 151-169.

10. Vinner, S. & Dreyfus T., (1989). ‘Images and Definitions for the Concept of Function’, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, No. 4, pp. 356-366.

11. Vinner, S., (1983), ‘Concept definition, concept image and the notion of function’, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 14, pp. 239-305.

12. Vinner, S. (1991), ‘The role of definition in the teaching and learning of mathematics'. in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*., Kluwer: Holand, pp. 65-81.