علی غلامیان
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی بجستان

اثبات نامساوی‌ها به کمک توابع محدب (۱)

اشاره

مطلب حاضر ضمن معرفی توابع محدب، برخی نامساوی‌های مهم را به کمک این توابع اثبات می‌کند. این مقاله در دو بخش تنظیم شده است که بخش اول آن را در این شماره می‌خوانید.

توابع محدب ابزار قدرتمندی برای اثبات رده‌ی بزرگی از نامساوی‌ها هستند. در این مقاله قصد داریم شما را با این موضوع آشنا کنیم. از این‌رو، نخست به بیان نامساوی مشهور ینسن می‌پردازیم و سپس آن را با استفاده از توابع محدب اثبات می‌کنیم.

توابع محدب

تابع حقیقی مقدار f روی بازه‌ی I، **محدب**[1] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in I$ و x و $\lambda \in [0,1]$ ؛

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad (1)$$

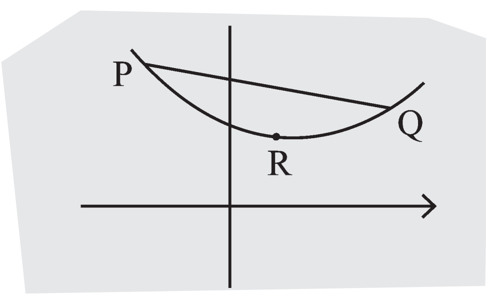
تابع f را اکیداً محدب[2] می‌نامیم هرگاه برای هر $y \in I$ و x که $x \neq y$ و $\lambda \in (0,1)$ ؛

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad (2)$$

توجه: f مقعر (اکیداً مقعر[3]) روی I نامیده می‌شود اگر $-f$ روی I محدب (اکیداً محدب) باشد.

مفهوم هندسی تحدّب

f کاملاً محدب است اگر و تنها اگر برای هر دو نقطه‌ی $P=(x,f(x))$ و $Q=(y,f(y))$ روی نمودار f و به ازای هر z بین x و y؛ نقطه‌ی $R=(z,f(z))$ زیر پاره‌خط PQ قرار گیرد.



نمودار یک تابع محدب

چگونه یک تابع محدب را بدون کشیدن نمودار آن، تشخیص دهیم؟

برای تشخیص محدب بودن یا نبودن یک تابع، می‌توانیم مستقیماً از (۱) استفاده کنیم. اما آزمون زیر اغلب اوقات بسیار مفید است.

آزمون تحدّب توابع

فرض کنید f یک تابع دو بار مشتق‌پذیر روی بازه‌ی I باشد. در این صورت

- f روی I محدب است، اگر برای هر $x \in I$، $f''(x) \geq 0$.
- f روی I اکیداً محدب است اگر برای هر x درون I، $f''(x) > 0$.

تبصره‌ها

- اگر f یک تابع پیوسته روی I باشد، آن‌گاه f محدب است اگر و تنها اگر برای هر x_1 و $x_2 \in I$؛

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

و f اکیداً محدب است و اگر و تنها اگر برای هر $x_2 \in I$ و x_1 و $x_1 \neq x_2$؛

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

- اگر f یک تابع محدب روی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه f ماکزیمم خود را در a یا b (یا شاید هر دو) اختیار می‌کند.

مثال‌هایی از توابع اکیداً محدب

- $f(x)=x^r$ ، $x>0$ و $r>1$؛
- $f(x)=\frac{1}{(x+a)^r}$ ، $x>-a$ و $r>0$؛
- $f(x)=\tan x$ ، $x \in [0, \frac{\pi}{2})$؛
- $f(x)=e^x$ ، $x \in \mathbb{R}$.

مثال‌هایی از توابع اکیداً مقعر

- $f(x)=\sin x$ ، $x \in [0,\pi]$؛
- $f(x)=\cos x$ ، $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$؛
- $f(x)=Lnx$ ، $x \in (0,\infty)$؛
- $f(x)=x^r$ ، $x>0$ و $r \in (0,1)$.

توجه کنید که

- تابع خطی $f(x)=ax+b$ $(x \in \mathbb{R})$ هم محدب و هم مقعر است؛
- جمع دو تابع محدب (یا به ترتیب مقعر)، یک تابع محدب (یا به ترتیب مقعر) است.

نامساوی ینسن[4]

نامساوی ینسن توسیعی از نامساوی (۱) است. ینسن (۱۹۲۵-۱۸۵۹) ریاضی‌دان دانمارکی، نخستین کسی است که این نامساوی را در سال ۱۹۰۵ ثابت کرد.

نامساوی ینسن: فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. هم‌چنین فرض کنید $x_1, x_2, \dots x_n \in I$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ به‌طوری که $\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_n=1$. در این صورت

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\dots+\lambda_n f(x_n) \quad (3)$$

اثبات: از استقراء ریاضی برای اثبات نامساوی استفاده می‌کنیم. به‌وضوح نامساوی برای حالت $n=1$ برقرار است.

اکنون فرض کنیم که نامساوی برای $n=k$ درست باشد، در این صورت نشان می‌دهیم که برای $n=k+1$ نیز برقرار است. فرض کنیم $x_1, \dots, x_k$ و $x_{k+1} \in I$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0$ به‌طوری‌که $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$. در این صورت حداقل یکی از λ_i ها $(1 \leq i \leq k+1)$ باید کمتر از یک باشد. بدون این‌که از کلیت مسئله کم شود فرض می‌کنیم $\lambda_{k+1}<1$. در این صورت قرار می‌دهیم

$$u=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1+\dots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k$$

داریم

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}+\dots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}=1$$

و هم‌چنین $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_{k+1}x_{k+1}=(1-\lambda_{k+1})u+\lambda_{k+1}x_{k+1}$. به‌وضوح $\min\{x_1,\dots,x_k\}\le u\le \max\{x_1,\dots,x_k\}$ در نتیجه $u\in I$. اکنون چون f محدب است، داریم

$$f((1-\lambda_{k+1})u+\lambda_{k+1}x_{k+1})\le(1-\lambda_{k+1})f(u)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

با توجه به فرض استقراء داریم

$$f(u)\le\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1)+\dots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k)$$

حال با ترکیب دو نامساوی بالا، حکم برای $n=k+1$ برقرار می‌شود.

بنابراین طبق استقرای ریاضی، نامساوی موردنظر برای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است.

تبصره‌ها

- برای توابع اکیداً محدب تساوی در (۳) برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=x_2=\dots=x_n$.
- اگر $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ ، آن‌گاه (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$f(\frac{x_1+\dots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n} \qquad (۴)$$

- اگر f یک تابع مقعر باشد، آن‌گاه نامساوی‌های (۳) و (۴) به صورت زیر می‌شوند

$$f(\lambda_1n_1+\dots+\lambda_nx_n)\ge\lambda_1f(x_1)+\dots+\lambda_nf(x_n) \qquad (۳')$$

$$f(\frac{x_1+\dots+x_n}{n})\ge\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n} \qquad (۴')$$

مثال‌ها

مثال ۱. اگر $a,b>0$ و $a+b=2$ ، آن‌گاه

$$(1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5\le 2^6$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴′) با تابع اکیداً مقعرِ $f(x)=(1+\sqrt[5]{x})^5$ روی $(0,\infty)$

(زیرا $f''(x)=4(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x}})^3(\frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}})<0$ روی $(0,\infty)$)

داریم

$$f(\frac{a+b}{2})\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$(1+\sqrt[5]{\frac{a+b}{2}})^5\ge\frac{(1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5}{2}$$

حال با توجه به این‌که $a+b=2$ ، نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که $a=b=1$.

مثال ۲. اگر $a,b,c>0$ ، آن‌گاه

$$a^a.b^b.c^c\ge(\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$$

حل. نامساوی بالا هم ارز است با

$$Ln(a^a.b^b.c^c)\ge Ln(\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$$

یا

$$aLna+bLnb+cLnc\ge(a+b+c)Ln(\frac{a+b+c}{3})$$

با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدبِ $f(x)=xLnx$ روی $(0,\infty)$ (زیرا $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ روی $(0,\infty)$) داریم

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\ge f(\frac{a+b+c}{3})$$

$$\frac{aLna+bLnb+cLnc}{3}\ge\frac{(a+b+c)}{3}Ln(\frac{a+b+c}{3})$$

یا

$$aLna+bLnb+cLnc\ge(a+b+c)Ln(\frac{a+b+c}{3})$$

در نتیجه نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

مثال ۳. اگر $a,b,c>۰$ آن‌گاه

$$\frac{a}{a+۳b+۳c}+\frac{b}{۳a+b+۳c}+\frac{c}{۳a+۳b+c}\ge\frac{۳}{۷}$$

حل. فرض کنید $s=۳(a+b+c)$ و $f(x)=\frac{x}{s-x}$ ، $x\in(۰,s)$.

در این صورت تابع f روی $(۰,s)$ اکیداً محدب است زیرا روی $(۰,s)$ ، $f''(x)=\frac{۲s}{(s-x)^۳}>۰$. حال با قرار دادن $x_۱=۲a$ ، $x_۲=۲b$ و $x_۳=۲c$ در نامساوی (۴) داریم

$$f\left(\frac{۲a+۲b+۲c}{۳}\right)\le\frac{f(۲a)+f(۲b)+f(۲c)}{۳}$$

$$\frac{\frac{۲a+۲b+۲c}{۳}}{s-\frac{۲a+۲b+۲c}{۳}}\le\frac{۱}{۳}\left[\frac{۲a}{s-۲a}+\frac{۲b}{s-۲b}+\frac{۲c}{s-۲c}\right]$$

$$\frac{a+b+c}{۳s-۲(a+b+c)}\le\frac{۱}{۳}\left[\frac{a}{s-۲a}+\frac{b}{s-۲b}+\frac{c}{s-۲c}\right]$$

یا

$$\frac{۳(a+b+c)}{۳s-۲(a+b+c)}\le\frac{a}{s-۲a}+\frac{b}{s-۲b}+\frac{c}{s-۲c}$$

با توجه به این که $s=۳(a+b+c)$ ، نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی وقتی برقرار است که $a=b=c$.

مثال ۴. اگر $a_۱,a_۲,\ldots,a_n\ge ۱$ ، آن‌گاه

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+a_k}\ge\frac{n}{۱+\sqrt[n]{a_۱\ldots a_n}}$$

حل. فرض کنیم $f(x)=\frac{۱}{۱+e^x}$ ، $x\in[۰,\infty)$. در این صورت تابع f روی $[۰,\infty)$ اکیداً محدب است زیرا روی $(۰,\infty)$ ، $f''(x)=\frac{e^x(e^x-۱)}{(e^x+۱)^۳}>۰$. با استفاده از نامساوی (۴) داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\ge nf\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+e^{x_i}}\ge\frac{n}{۱+e^{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x_i}}$$

با قرر دادن $x_i=Lna_i$ به ازای $i=۱,۲,\ldots,n$ ، نامساوی خواسته شده به‌دست می‌آید. تساوی زمانی برقرار است که $a_۱=a_۲=\cdots=a_n$.

مثال ۵. برای یک مثلث با زاویه‌های α و β و γ ، نامساوی‌های زیر برقرار است

الف) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ؛

ب) $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le ۳\sqrt[۴]{\frac{۳}{۴}}$ ؛

پ) $\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma\le\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$ ؛

ت) $\sec\frac{\alpha}{۲}+\sec\frac{\beta}{۲}+\sec\frac{\gamma}{۲}\ge ۲\sqrt{۳}$ ؛

ث) $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\le\frac{۱}{۸}$ ؛

حل. برای قسمت‌های (الف)، (ب) و (پ) به‌ترتیب از توابع اکیداً مقعر sinx، $\sqrt{\sin x}$ و Lnsinx روی $(۰,\pi)$ در نامساوی (۴) استفاده می‌کنیم و برای قسمت (ت)، از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $\sec\frac{x}{۲}$ روی $(۰,\pi)$ استفاده می‌کنیم. در قسمت (ث) اگر α ، β و γ حاده باشند، آن‌گاه از نامساوی (۴) با تابع اکیداً معقر Lncosx روی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ استفاده می‌کنیم؛ در غیر این صورت با توجه به این که فقط یکی از زوایای α و β و γ می‌تواند قائم یا بزرگ‌تر باشد، در نتیجه $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le۰$. لذا نامساوی به‌وضوح برقرار است.

در تمام قسمت‌های فوق حالت تساوی وقتی برقرار است که $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

مثال ۶ . (India ، ۱۹۹۵) فرض کنید $x_1,\ldots,x_n\ (n\geq 2)n$ عدد مثبت باشند که مجموع آن‌ها برابر یک است . در این صورت ثابت کنید

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

حل . با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ روی $(0,1)$ داریم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geq f(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n})$$

$$\frac{1}{n}(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}})\geq\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

یا

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

تساوی وقتی برقرار است که $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

مثال ۷ . فرض کنید $x,y,z>0$ و $x+y+z=1$. در این صورت ثابت کنید

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\geq 64$$

حل . با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})$ روی $(0,\infty)$ (زیرا $f''(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}>0$ روی $(0,\infty)$) داریم

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f(\frac{x+y+z}{3})$$

$$\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})+\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{y})+\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{z})\geq 3\mathrm{Ln}4$$

یا

$$\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})+(1+\frac{1}{y})+(1+\frac{1}{z})\geq \mathrm{Ln}4^3$$

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\leq 64$$

تساوی وقتی برقرار است که $x=y=z$

مثال ۸ . فرض کنید a و b و c اعداد مثبت باشند به‌طوری که $ab+bc+ca=abc$ در این صورت

$$\sqrt[a]{a}\sqrt[b]{b}\sqrt[c]{c}(a+b+c)\geq abc$$

حل . چون $ab+bc+ca=abc$ پس $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

بنابراین با انتخاب $\lambda_1=\frac{1}{a}$ ، $\lambda_2=\frac{1}{b}$ ، $\lambda_3=\frac{1}{c}$ ، $x_1=ab$ ، $x_2=bc$ ، $x_3=ca$ و به‌کار بردن نامساوی ۳′ با تابع اکیداً مقعر $f(x)=\mathrm{Ln}x$ روی $(0,\infty)$ داریم

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)$$
$$\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$$

$$\mathrm{Ln}(a+b+c)\geq\frac{1}{a}\mathrm{Ln}ab+\frac{1}{b}\mathrm{Ln}bc+\frac{1}{c}\mathrm{Ln}ca$$

یا

$$\mathrm{Ln}(a+b+c)\geq\mathrm{Ln}(ab)^{\frac{1}{a}}+\mathrm{Ln}(bc)^{\frac{1}{b}}+\mathrm{Ln}(ca)^{\frac{1}{c}}$$

یا

$$a+b+c\geq a^{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+b^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+c^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

اکنون با توجه به این که $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ داریم

$$a+b+c\geq a^{1-\frac{1}{b}}.b^{1-\frac{1}{c}}.c^{1-\frac{1}{a}}$$

یا

$$a+b+c \ge \frac{a}{\sqrt[b]{a}}.\frac{b}{\sqrt[c]{b}}.\frac{c}{\sqrt[a]{c}}$$

یا

$$\sqrt[b]{a}.\sqrt[c]{b}.\sqrt[a]{c}(a+b+c) \ge abc$$

تساوی زمانی برقرار است که $a=b=c$

مسائلی برای حل

۱ . اگر ABC یک مثلث با زوایای α و β و γ باشد، آن‌گاه

الف) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ؛

ب) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$ ؛

پ) $\tan^p_\alpha + \tan^p_\beta + \tan^p_\gamma \le 3\sqrt{3}$ ($p \ge 1$ و α و β و γ حاده هستند) .

راهنمایی . اگر قرار دهیم $\beta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, \alpha' = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ و $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ آن‌گاه $\alpha', \beta', \gamma' = (0,\pi)$ و $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$.

حال با جایگزین کردن α' و β' و γ' بجای α و β و γ در قسمت‌های (پ) و (ث) از مثال (۵) به ترتیب (الف) و (ب) حاصل می‌شود. برای قسمت (پ) از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x) = \tan^p x$ $x \in (0, \frac{1}{2})$ و $p \ge 1$ استفاده کنید.

۲ . اگر a و b و c اندازه‌ی ضلع‌های یک مثلث باشند، آن‌گاه

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3$$

راهنمایی . از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x) = \frac{x}{s-x}$ که $x \in (0,s)$ و $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ استفاده کنید.

۳ . برای هر $x > 0$ ثابت کنید $x^x \ge (\frac{x+1}{x})^{x+1}$.

راهنمایی . از تابع اکیداً محدب $f(x) = xLnx$ روی $(0,\infty)$ و نامساوی (۳) با انتخاب $x_1 = x$ ، $x_2 = 1$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ استفاده کنید.

۴ . فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a+b+c=1$. در این صورت

$$a^{a(a+2b)}.b^{b(b+2c)}.c^{c(c+2a)} \ge \frac{1}{3}$$

راهنمایی . از تابع کاملاً مقعر $f(x) = Lnx$ روی $(0,\infty)$ و با به‌کار بردن نامساوی $(3')$ با انتخاب $\lambda_1 = a^2$ ، $\lambda_2 = b^2$ ، $\lambda_2 = c^2$ ، $\lambda_4 = 2ab$ ، $\lambda_5 = 2bc$ ، $\lambda_6 = 2ca$ ، $x_1 = \frac{1}{a}$ ، $x_2 = \frac{1}{b}$ ، $x_3 = \frac{1}{c}$ ، $x_4 = \frac{1}{a}$ ، $x_5 = \frac{1}{b}$ و $x_6 = \frac{1}{6}$ مسئله را حل کنید.

۵ . برای اعداد حقیقی مثبت a و b و c ثابت کنید

$$(\frac{2a}{b+c})^{\frac{2}{3}} + (\frac{2b}{c+a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{2c}{a+b})^{\frac{2}{3}} \ge 3$$

راهنمایی . از تابع اکیداً محدب $f(x) = (\frac{2x}{s-x})^{\frac{2}{3}}$ روی $(0,s)$ که در آن $s = a+b+c$ است در نامساوی (۴) استفاده کنید.

پی‌نوشت

1. Convex
2. Strictly Convex
3. Concave (Strictly Concave)
4. Jensen Inequality

منابع

[۱] والتر رودین، اصول آنالیز ریاضی، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۲، صفحه‌ی ۱۲۶ .

[2] Hrimiuc Dragos, Inequalities for convex functions (part I), " π in the Sky" Magzine, December 2001.

[3] Kedlaya Kiran, A<B (A is less than B), based on notes for the math olympiad program (MOP) version 1.0, last revised August, 1999

[4] Mildorf, T.J, Olympiad Inequalities, December 22, 2005.

[5] Popescu, P.G and Diaz-Barrero, J.L, Certain inequalities for convex functions, J. Ineq. Pure and Appl. math. 7(2) Art.41, 2006.