امتحان پایان ترم احتمال (۱) - دانشگاه خلیج فارس (بوشهر) - دی ماه ۱۳۸۸ - مدت امتحان: ۲ ساعت

۱- فرض کنید $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} N(0,1)$. اگر $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ باشند

الف- تابع چگالی توأم (Y_1, Y_2) را بیابید. ب- تابع چگالی کناری Y_2 را به دست آورید.

۲- فرض کنید $X, Y \overset{iid}{\sim} Exp(1)$ یعنی $f(x) = e^{-x},\ x>0$ نشان دهید که توزیع X به شرط $X+Y=u$ دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,u)$ است همچنین مطلوب است $E(X|X+Y)$

۳- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل هم باشند،

$X=x$	-1	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

، $f(y)=1,\quad 0<y<1$

مطلوب است $Var\left(Y^{X+1}\right)$. (راهنمایی: از شرطی کردن استفاده کنید.)

۴- الف- نشان دهید که $Cov(X, E(Y|X)) = Cov(X,Y)$

ب- اگر $X \sim U(0,1)$، $Y|X=x \sim bin(n,x)$ مطلوب است $Cov(X,Y)$

۵- فرض کنید $X \sim N(0,1)$ و I یک متغیر تصادفی مستقل از X با تابع چگالی

$P(I=1) = \frac{1}{2} = P(I=0)$ ، و

$Y=\begin{cases} X, & I=1 \\ -X & I=0 \end{cases}$ باشد.

الف- نشان دهید که $Y \sim N(0,1)$ ب- مطلوب است $Cov(X,Y)$.

راهنمایی: از شرطی کردن استفاده کنید.

۶- فرض کنید $f(x,y) = |x|,\quad -1 \le y \le x,\ |x| \le 1$ مطلوب است تابع چگالی X به شرط $Y=y$.

سؤال اضافی: اگر (X,Y) دارای تابع چگالی

$f(x,y)=\begin{cases} K(x-y), & x=1,2,3,4 \\ & y=0,1,\dots,x \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$ باشد

الف- مطلوب است K

ب- مطلوب است تابع چگالی کناری X و تابع چگالی کناری Y.

موفق باشید

حل سئوالات امتحان پایانترم احتمال (۱)

۱-

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \dfrac{x_1}{x_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 y_2}{y_2+1} \\ x_2 = \dfrac{y_1}{y_2+1} \end{cases} \qquad J = -\frac{y_1}{(y_2+1)^2}$$

$$f(y_1, y_2) = f_{(x_1,x_2)}\left(\frac{y_1 y_2}{y_2+1}, \frac{y_1}{y_2+1}\right) \cdot \frac{y_1}{(y_2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 y_2}{y_2+1}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_2+1}\right)^2} \cdot \frac{y_1}{(y_2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-1}{2(y_2+1)^2}\left[y_1^2(1+y_2)\right]} \cdot \frac{y_1}{(y_2+1)^2}, \quad y_1 \in R, \; y_2 \in R$$

$$f(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi(1+y_2^2)}, \quad y_2 \in R$$

۲-

$$\begin{cases} x = t \\ x+y = u \end{cases} \qquad |J| = 1$$

$$f(t,u) = f_{(x,y)}(t, u-t) = e^{-t} \cdot e^{-(u-t)} = e^{-u}, \quad 0 < t < u$$

$$f(u) = \int_0^u e^{-u}\, dt = u e^{-u}, \quad u > 0$$

$$f(t|u) = \frac{f(t,u)}{f(u)} = \frac{1}{u}, \quad 0 < t < u$$

$$\Rightarrow x | x+Y = u \sim U(0, u)$$

$$\Rightarrow E(x | x+Y) = \frac{1}{u} = \frac{1}{x+Y}$$

۳-

$$Var(Y^{X+1}) = Var\left[E(Y^{X+1}|X)\right] + E\left[Var(Y^{X+1}|X)\right]$$

$$E\left[Y^{X+1}|X\right] = E(Y^{X+1}) = \int_0^1 y^{x+1}dx = \frac{1}{X+۲}$$

X, Y از استقلال

$$Var\left[E(Y^{X+1}|X)\right] = Var\left(\frac{1}{X+۲}\right) = E\left(\frac{1}{(X+۲)^۲}\right) - E^۲\left(\frac{1}{X+۲}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{۴} + \frac{1}{۹} \times \frac{1}{۲}\right) - \left(\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۲}\right)^۲$$

$$Var(Y^{X+1}|X) = Var(Y^{X+1}) = E(Y^{۲(X+1)}) - E^۲(Y^{X+1})$$

$$= \int_0^1 y^{x+۲}dy - \left[\int_0^1 y^{x+1}dy\right]^۲ = \frac{1}{X+۳} - \left(\frac{1}{X+۲}\right)^۲$$

$$E\left[Var(Y^{X+1}|X)\right] = E\left[\frac{1}{X+۳}\right] - E\left(\frac{1}{(X+۲)^۲}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{۳} \times \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} \times \frac{1}{۲}\right) - \left(\frac{1}{۴} + \frac{1}{۹} \times \frac{1}{۲}\right)$$

$$\rightarrow Var(Y^{X+1}) = \left(\frac{1}{۴} + \frac{1}{۹} \times \frac{1}{۲}\right) - \left(\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۲}\right)^۲ +$$

$$\left(\frac{1}{۳} \times \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} \times \frac{1}{۲}\right) - \left(\frac{1}{۴} \times \frac{1}{۹} \times \frac{1}{۲}\right) = \boxed{\frac{۱۹}{۷۲}}$$

۴- الف)

$$Cov(X, E(Y|X)) = E\left[X E(Y|X)\right] - E(X)E\left(E(Y|X)\right)$$

$$= E\left[E(XY|X)\right] - E(X) \cdot E(E(Y|X))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) = Cov(X,Y)$$

ب)

$$Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y|X)) = Cov(X, nX) = n\,Cov(X,X)$$

$$= n\,Var(X) = n \cdot \frac{1}{۲} = \boxed{\frac{n}{۲}}$$

۵- الف)

$$f(y) = f_X(y)\,P(I=1) + f_X(-y)\,P(I=0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad y \in R$$

پس $Y \sim N(0,1)$

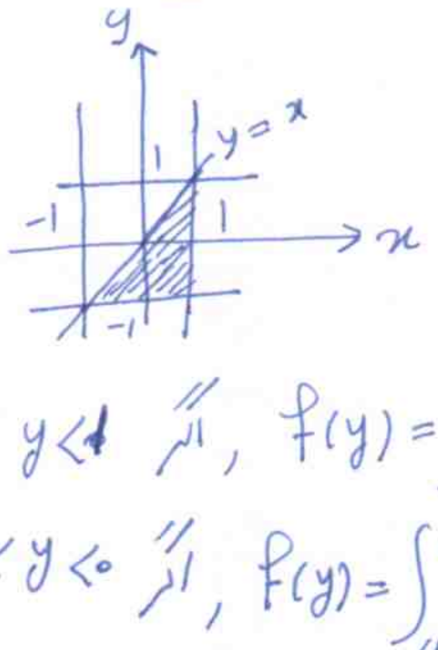
ب)

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - \overset{0}{E(X)}\,E(Y)$$

$$= E(X\cdot X)\,P(I=1) - E(X\cdot X)\,P(I=0) - 0$$

$$= E(X^2)\,\frac{1}{2} - E(X^2)\,\frac{1}{2} = 0$$

۶-



$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$f(y) = \int_x f(x,y)\,dx$$

اگر $0 < y < 1$، $f(y) = \int_y^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_y^1 = \frac{1}{2}(1-y^2)$

اگر $-1 < y < 0$، $f(y) = \int_y^0 (-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}(1+y^2)$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+y^2), & -1 < y < 0 \\ \frac{1}{2}(1-y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{جای دیگر} \end{cases}$$