نمونه سوالات : آنالیز ریاضی 1

نام استاد : دکتر صادقی

تاریخ برگزاري : خرداد1386

دانشگاه : فردوسی مشهد

دانشکده : *علوم ریاضی*

رشته : ریاضی

1. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد. نشان دهید هر تابع پیوسته حقیقی مقدار روی X کراندار است.

2. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک همبند باشد. نشان دهید برای هر زیر مجموعۀ غیر تهی و اکید از X مانند A $(A \subsetneqq X)$ ، $\partial(A) \neq \emptyset$.

3. فرض کنید f تابعی پیوسته از فضای متریک (X,d_X) به توی فضای متریک (Y,d_Y) باشد به طوری که برای هر $B \subseteq Y$ ، $f^{-1}(B^o) \subseteq [f^{-1}(B)]^o$. ثابت کنید f پیوسته است.

4. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $a \in X$ باشد. تابع حقیقی مقدار f_a را روی X به صورت

$$\begin{cases} f_a : X \to \mathbb{R} \\ f_a(x) = d(x,a) \end{cases}$$

در نظر می گیریم. ثابت کنید :

الف : تابع f_a روی X به طور یکنواخت پیوسته است.

ب : $\sup|f_a(x) - f_b(x)| = d(a,b)$

5. برای دنباله ی $a_n = (-1)^n\left(2 + \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$ حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n - \lim_{n\to\infty}\inf a_n = ?$$

6. فرض کنید f تابعی یکنواخت پیوسته از فضای متریک (X,d_X) به توی فضای متریک (Y,d_Y) باشد و $\{x_n\}$ یک دنباله ی کشی در X. ثابت کنید $\{f(x_n)\}$ نیز یک دنباله ی کشی در Y می باشد. (در ضمن نشان دهید با ذکر یک مثال شرط پیوستگی یکنواخت f الزامی است.)

7. فرض کنید تابع f بر بازه ی $[0,1]$ دارای مشتق باشد و هم چنین روی فاصله ی $[0,1]$ ، $|f'(x)| \leq 1$ ، اگر قرار دهیم $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ نشان دهید دنباله ی $\{a_n\}$ همگراست.

8. قضیه ی مقدار میانی را برای مشتق یک تابع حقیقی بیان و اثبات نمایید.

9. فرض کنید f تابعی از فضای متریک (X, d_X) به توی فضای متریک (Y, d_Y) باشد به طوری که برای هر زیرمجموعهٔ فشرده $K \subseteq X$، تحدید تابع f بر K پیوسته باشد. ثابت کنید تابع $f: X \to Y$ نیز پیوسته است.

از سه سؤال زیر فقط به یک سوال به دلخواه پاسخ دهید.

A. ثابت کنید تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر $[\,0\,,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

B . فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f : A \to \mathbb{R}$ بطور یکنواخت پیوسته باشد و A یک زیر مجموعه کراندار از $\mathbb{R}$. ثابت کنید تابع f بر A کراندار است.

C . نشان دهید بسته و کراندار بودن در حالت کلی فشردگی را در فضاهای متریک نتیجه نمی دهد.