نام آزمون : میانترم آنالیز ریاضی 1 نام استاد : دکتر ابراهیمی ویشکی تاریخ برگزاري : 1379/2/27 دانشگاه : فردوسی مشهد

دانشکده : علوم ریاضی

رشته : ریاضی

1. نامساوی هولدر را در $\mathbb{C}^k$ بیان و اثبات کنید.

2. نشان دهید که $d(m,n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$ یک متریک روی $\mathbb{N}$ است.

آ : گوی باز به مرکز 2 و شعاع $\frac{1}{5}$ را در $(\mathbb{N},d)$ مشخص کنید .

ب : آیا $(\mathbb{N},d)$ کراندار است؟ کامل است ؟ تفکیک پذیر است؟ فشرده است ؟

( با ذکر دلیل ).

3. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای باز بودن G در فضای X آن است که به ازای هر مجموعه ی دلخواه A در X ، $\bar{A}\cap G\subseteq\overline{A\cap G}$.

4. به ازای هر دو مجموعه ی فشرده A و B در $\mathbb{R}^k$ نشان دهید که مجموعه ی $2A-B=\{2a-b\ i\,;a\in A\,,b\in B\}$ نیز فشرده است.

5. نشان دهید که هر فضای متریک با خاصیت فشردگی دنباله ای دارای خاصیت فشردگی شماراست.

6. آ : نشان دهید که فضای $\mathbb{R}$ با متر معمولی کامل است . با متر گسسته چطور؟

ب : به ازای هر دو دنباله ی کوشی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در فضای متریک $(X,d)$ نشان دهید که دنباله ی $\{d(x_n,y_n)\}$ همگراست.

7. فرض کنید X یک فضای متریک ناهمبند باشد . نشان دهید :

آ : مجموعه های باز و ناتهی مانند $G_1$ و $G_2$ موجودند به طوری که $X=G_1\cup G_2$ و $G_1\cap G_2=\emptyset$.

ب : اگر C در X همبند باشد آنگاه $C\subseteq G_1$ یا $C\subseteq G_2$.