

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



WWW.EGZA.TK

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۳۱۲۲۵

۸۶۰۶۰

WWW.EGZA.TK

تعداد سوال: نسی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تشریحی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۳

* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۱. فرض کنید $f: R^m \rightarrow R^n$ یک تابع خطی با ماتریس $A = (a_{ij})$ باشد. در اینصورت کدام صحیح است؟الف. هرگاه $n < m$ و رتبه A ، n باشد آنگاه f یک به یک است.ب. هرگاه $n < m$ و رتبه A ، m باشد آنگاه f پوشا است.

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \quad \text{ج.}$$

د. ممکن است f پیوسته نباشد.

۲. فرض کنید $f = (f_1, f_2, f_3): R^2 \rightarrow R^3$ بطوریکه

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + x \cos y \\ f_2(x, y) = xy + \sin y \\ f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 2x \end{cases}$$

در اینصورت

 $DF(0, 0)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{د.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ج.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ب.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{الف.} \end{matrix}$$

۳. تابع $f = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow R^n$ ($X \subseteq R^m$) را در نظر بگیرید. در اینصورت کدام عبارت ممکن

است صحیح نباشد؟

الف. f در C مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر f_i ($1 \leq i \leq n$) در C مشتقپذیر باشد.ب. f در C مشتقپذیر است هرگاه تمام مشتقات جزئی $D_j f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) موجود باشند.ج. وجود و پیوستگی تمام مشتقات جزئی $D_j f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) در گوی بازی به مرکز C ، مشتقپذیری f را در C نتیجه می دهد.د. $Df(c)$ دوسویی است اگر و فقط اگر $Jf(c) \neq 0$.۴. اگر $f: R^n \rightarrow R^n$ یک انقباض باشد آنگاه:الف. f بر R^n مشتقپذیر است.ب. f بر R^n کراندار است.ج. f بر R^n پیوسته یکنواخت است.د. f بر R^n پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست.۵. فرض کنید $f: R^2 \rightarrow R^2$ ، $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$. در اینصورت f در همسایگی کدام نقطه وارون

موضعی دارد؟

الف. $(0, 0)$ ب. $(0, 1)$ ج. $(1, 0)$ د. $(0, 2)$ 

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکلیفی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تئوری و تکلیفی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۳۱۲۲۵

تعداد کل صفحات: ۲

۶. فرض کنید $g(x, y) = x^2 + y^2$ ، $f(x, y) = x + y$. در اینصورت در همسایگی کدام نقطه، توابع g, f وابسته تابعی نمی باشند؟

الف. $(1, 1)$ ب. $(-1, -1)$ ج. $(0, 0)$ د. $(1, -1)$

۷. با توجه به قضیه رتبه، رفتار تابع پیوسته f مشتقپذیر f در نزدیکی نقطه X شبیه رفتار کدام تابع است؟

الف. $Df(x)$ ب. $\|f(x)\|$ ج. $D^2 f(x)$ د. $D^2 f(x) \cdot Df(x)$

۸. فرض کنید تابع $f: X \rightarrow R^n$ ($X \subseteq R^m$) بر X مشتقپذیر و در $C \in X$ ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد. در اینصورت:

الف. در یک همسایگی C ، $f(x) = 0$ ب. $Df(c) = 0$

ج. در یک همسایگی C ، $Df(x) = 0$ د. $Df(c) \neq 0$

۹. هرگاه تابع $f: R^m \rightarrow R^n$ در نقطه X ، دوبار مشتقپذیر باشد، آنگاه $D^2 f(x)(y)$ به کدام مجموعه تعلق دارد؟

الف. R^n ب. R^m

ج. $L(R^m, R^n)$ د. $L(R^m, L(R^m, R^n))$

۱۰. کدام عبارت صحیح نیست؟

الف. هر تابع پیوسته $f: [a, b] \rightarrow R^n$ را یک راه در R^n می نامیم.

ب. نماینده هر خم در R^n ، یک تابع پیوسته است.

ج. نماینده هر مسیر در R^n ، یک تابع مشتقپذیر است.

د. هر مسیر در R^n طولپذیر است.

۱۱. اگر $\Phi: [a, b] \rightarrow R^n$ نماینده مسیر γ باشد، آنگاه طول γ برابر است با:

الف. $\int_a^b \|\Phi'\|$ ب. $\int_a^b \|\Phi\|$

ج. $\int_a^b \|\Phi'\|^2$ د. $\int_a^b \|\Phi\|^2$

۱۲. فرض کنید γ مسیری در R^3 با ضابطه $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) و $f(x, y, z) = (yz, 0, xy)$ باشد.

در اینصورت $\int_{\gamma} f$ برابر است با:

الف. ۳ ب. ۲ ج. ۱ د. ۰

۱۳. فرض کنید $X = R^n$ و $E \subseteq X$. در اینصورت تابع $\chi_E: X \rightarrow R$ بر X ننگرالپذیر است هرگاه:

الف. اندازه E صفر باشد.

ب. اندازه مرز E صفر باشد.

ج. E فشرده باشد.

د. E مجموعه‌ای کراتدار باشد.



نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۲۱۲۲۵

تعداد کل صفحات: ۲

WWW.EGZA.TK

۱۳. فرض کنید قدر مجموعه $E \subseteq R^n$ را با $C(E)$ نمایش دهیم. در اینصورت اگر p یک متوازی السطوح در

$R^n, R^n \rightarrow R^n$ تابعی خطی با ژاکوبی λ باشد، آنگاه:

الف. $C(p) \cdot C(\lambda(p)) = |J|$ ب. $C(\lambda(p)) = |J| C(p)$

ج. $C(p) \cdot C(\lambda(p)) = |J|^{-1}$ د. $C(\lambda(p)) = |J|^{-1} C(p)$

۱۵. اثر یک رویه بخشی در $R^n (n > 1)$ _____

الف. مجموعه‌ای باز است. ب. مجموعه‌ای همبند است.

ج. دارای قدر صفر است. د. دارای قدر نیست.

۱۶. تابع $\Phi: R^+ \rightarrow R$ را با ضابطه $\Phi(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ در نظر بگیرید. در مورد تابع Φ' کدام عبارت صحیح است؟

الف. حداقل یک $y \in R^+$ هست که $\Phi'(y)$ موجود نیست.

ب. $\Phi'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \cos x dx$

ج. $\Phi'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$

د. $\Phi'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx$

۱۷. کدام عبارت صحیح نیست؟ (در R^n)

الف. هر مجموعه متناهی دارای قدر صفر است. ب. مرز یک مجموعه فشرده دارای قدر صفر است.

ج. هر مجموعه با قدر صفر، دارای اندازه صفر است. د. هر مجموعه با اندازه صفر، دارای قدر صفر است.

۱۸. کدام عبارت صحیح است؟

الف. w یک -1 فرم کامل است هر گاه تابعی مانند f باشد که $w = df$

ب. w یک -1 فرم کامل است هر گاه تابعی مانند f باشد که $f = dw$

ج. هر فرم بسته یک فرم کامل است.

د. فرمهای کاملی وجود دارند که بسته نیستند.

۱۹. کدام عبارت صحیح نیست؟

الف. حاصلضرب گوه‌ای خاصیت جابجایی ندارد. ب. حاصلضرب گوه‌ای دو تانسور متناوب، متناوب است.

ج. حاصلضرب گوه‌ای خاصیت شرکت‌پذیری دارد. د. حاصلضرب تانسوری دو تانسور متناوب، متناوب است.

۲۰. فرض کنید w, η به ترتیب -1 فرم و 2 -فرم در $E \subseteq R^n$ باشند. در اینصورت:

الف. $d(w \wedge \eta) = (dw) \wedge \eta - w d\eta$ ب. $d^r \eta \neq 0, d^r w = 0$

ج. $d(w \wedge \eta) = (dw)\eta + w d\eta$ د. $d^r \eta = 0, d^r w \neq 0$



نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکمیلی - تئوری ۵

رشته تحصیل: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تئوری ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

WWW.EGZA.TK

تعداد کل صفحات: ۲

سؤالات تشریحی:

۱. ثابت کنید اگر تابع $f: X \rightarrow R^n$ ($X \subseteq R^m$) خطی باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ ، $Df(x) = f$.

۲. ثابت کنید توابع f, g از R^r به R با ضابطه‌های $f(x, y) = xy + e^{rxy}$ و $g(x, y) = xy - e^{rxy}$ در همسایگی هر نقطه $(a, b) \in R^r$

که $b \neq 0$ وابسته تابعی می باشند.

۳. ثابت کنید هر مسیر در R^n ، طولپذیر است.

۴. ثابت کنید اگر $A \subseteq R^n$ فشرده و دارای اندازه صفر باشد، آنگاه قدر A صفر است.

۵. ثابت کنید اگر w یک k -فرم و η یک l -فرم باشد آنگاه:

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$$

