کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی ۱- فنی (۲ گروه هماهنگ)**	نیمسال (اول/**دوم**) **۸۷-۱۳۸۶**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۷/۳/۲۰**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- محاسبه کنید : $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ **۱۵ نمره**

سوال۲- چهار ریشه مختلط معادله $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال۳- انتگرال نامعین مقابل را حل کنید : $\int\frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx$ **۲۰ نمره**

سوال۴- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y=\frac{x+1}{x^3-1}$ ، محور x ها و خط $x=2$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۵- ناحیه محصور به منحنی تابع $y=\ln x$ و محورهای مختصات ، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره مقابل را مشخص کنید : $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ **۱۵ نمره**

سوال۷- الف) همگرایی یا واگرایی دو سری $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$ و $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\cdots$ را مشخص کنید. **۱۰ نمره**

ب) بسط مک لورن تابع $f(x)=\cos^2 x$ را تا چهار جمله غیر صفر بنویسید. **۱۰ نمره**

موفق باشید

شماره ردیف

نمره

نام خانوادگی : نام : شماره دانشجویی : نام درس :

پاسخ سوال ۱

محاسبه کنید : $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

اگر $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ آنگاه $\ln y=\frac{x^2}{x+1}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)}$

اکنون $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)}=\frac{0}{0}$ که مبهم است و به کمک قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}{-\frac{x+2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{(x+1)(x+2)^2}=-1$$

اما $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to\infty}y=-1$ یعنی $\lim\limits_{x\to\infty}y=\frac{1}{e}$

روش دوم : $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}}=(e^{-1})^1=\frac{1}{e}$

در هر حالت داریم : $\boxed{L=\frac{1}{e}}$

پاسخ سوال ۱

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

شماره ردیف

نمره

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :

پاسخ سوال ۲

چهار ریشه مختلط معادله $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ را بیابید.

طرفین معادله را در $(z-1)$ضرب می کنیم داریم : $z^5-1=0$

این معادله ۵ ریشه دارد که ۴ ریشه آن ریشه های معادله اصلی هستند

$$z_1=e^{\frac{2\pi i}{5}}\ ,\ z_2=e^{\frac{4\pi i}{5}}\ ,\ z_3=e^{\frac{6\pi i}{5}}\ ,\ z_4=e^{\frac{8\pi i}{5}}$$

و ریشه $z=1$ که غیر قابل قبول است.

پاسخ سوال ۲

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :   **شماره ردیف**

نمره

پاسخ سوال ۳

انتگرال نامعین مقابل را حل کنید : $\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx$

روش اول : $\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx = \int (\sin x - 2 + \frac{4}{2+\sin x})dx = -\cos x - 2x + 4\int \frac{1}{2+\sin x}dx$

با تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ داریم $\int \frac{1}{2+\sin x}dx = \int \frac{dt}{1+t+t^2} = \int \frac{4dt}{(2t+1)^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} Arc\tan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$

در نهایت چون $t=\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ داریم

$$\boxed{\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx = -\cos x - 2x + \frac{8}{\sqrt{3}} Arc\tan\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sqrt{3}(1+\cos x)} + c}$$

روش دوم : اگر از همان ابتدا تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx = \int \frac{4t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t+t^2)} = \int \left(\frac{-4}{1+t^2} + \frac{4t}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{1+t+t^2}\right)dt$$

$$= -4\arctan t - \frac{2}{1+t^2} + \int \frac{4}{1+t+t^2}dt$$

$$= -2x - 2\cos^2\frac{x}{2} + \frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= -\cos x - 2x + \frac{8}{\sqrt{3}} Arc\tan\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sqrt{3}(1+\cos x)} + c'$$

یعنی

$$\boxed{\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}dx = -\cos x - 2x + \frac{8}{\sqrt{3}} Arc\tan\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sqrt{3}(1+\cos x)} + c'}$$

پاسخ سوال ۳

پاسخ سوال ۴

مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y=\frac{x+۱}{x^۳-۱}$ ، محور x ها و خط $x=۲$ را بیابید.

$$S=\int_۲^\infty \frac{x+۱}{x^۳-۱}dx=\frac{۱}{۳}\int_۲^\infty\left(\frac{۲}{x-۱}-\frac{۲x+۱}{x^۲+x+۱}\right)dx=\frac{۱}{۳}[۲\ln(x-۱)-\ln(x^۲+x+۱)]_۲^\infty$$

$$=\frac{۱}{۳}[\ln\frac{(x-۱)^۲}{x^۲+x+۱}]_۲^\infty=-\frac{۱}{۳}\ln\frac{۱}{۷}=\frac{\ln ۷}{۳}$$

بنابر این

$$\boxed{S=\frac{\ln ۷}{۳}}$$

پاسخ سوال ۴

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی : نام : شماره دانشجویی : نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۵

ناحیه محصور به منحنی تابع $y = \ln x$ و محورهای مختصات ، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

روش اول :
$$V = \int_{0}^{1} 2\pi\, x\,|\ln x|\, dx = -2\pi\left[\frac{1}{4}x^{2}(2\ln x - 1)\right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \lim_{x\to 0^{+}} x^{2}(\ln x - 1)\right) = \frac{\pi}{2}$$

روش دوم :
$$V = \int_{-\infty}^{0} \pi\, x^{2} dy = \int_{-\infty}^{0} \pi\, e^{2y} dy = \left[\frac{\pi}{2}e^{2y}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

بنابر این

$$\boxed{V = \frac{\pi}{2}}$$

پاسخ سوال ۵

پاسخ سوال ۶

همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره مقابل را مشخص کنید : $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

در مورد تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ در بازه $[0,\pi]$ داریم $0\le y\le 1$ پس $0\le\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_0^{\pi}dx=\pi$

یعنی انتگرال ناسره داده شده همگرا است.

پاسخ سوال ۶

پاسخ سوال ۷

الف) همگرایی یا واگرایی دو سری $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$ و $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\cdots$ را مشخص کنید.

سری اول طبق آزمون انتگرال همگرا است زیرا انتگرال $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=[\frac{-1}{\ln x}]_2^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}$ همگرا می باشد.

سری دوم را می توان به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$ نوشت و طبق آزمون مقایسه حدی در مقایسه با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(10n+1)}=10$. یعنی دو سری رفتار مشابه دارند و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است پس سری داده شده نیز واگرا خواهد بود.

ب) بسط مک لورن تابع $f(x)=\cos^2 x$ را تا چهار جمله غیر صفر بنویسید.

$$f'(x)=-\sin 2x\ ,\ f''(x)=-2\cos 2x\ ,\ f'''(x)=4\sin 2x\ ,\ f^{(4)}(x)=8\cos 2x\ ,$$
$$f^{(5)}(x)=-16\sin 2x\ ,\ f^{(6)}(x)=-32\cos 2x$$
$$f(0)=1\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)=-2\ ,\ f'''(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=8\ ,\ f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(6)}(0)=-32$$
$$f(x)=\cos^2 x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{8}{4!}x^4-\frac{32}{6!}x^6+\cdots$$
$$=1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+\cdots$$

در نتیجه

$$\boxed{\cos^2 x=1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+\cdots}$$

پاسخ سوال ۷