دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی یک – ترم اول ۸۵–۱۳۸۴

۱– فرض کنید $a_1 = 3$ و به ازای $n \geq 2$ داشته باشیم $a_n = \frac{2}{1+a_{n-1}}$. نشان دهید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است. سپس، مقدار حد آن را محاسبه کنید. (۲/۵ امتیاز)

حل– با توجه به ضابطهٔ دنباله، ملاحظه می‌گردد که اگر $a_n > 1$، آنگاه $a_{n+1} = \frac{2}{a_n+1} < \frac{2}{1+1} = 1$ و بالعکس، اگر $a_n < 1$، آنگاه $a_{n+1} = \frac{2}{a_n+1} > \frac{2}{1+1} = 1$. یعنی، a_n ها یکی در میان بزرگتر از یک و کوچکتر از یک هستند. چون $a_1 = 3$، پس جملات با اندیس فرد از یک بزرگتر و جملات با اندیس زوج کوچکتر از یک هستند. از طرفی $a_{n+2} - a_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$. در نتیجه، اگر $a_n < 1$، چون $a_n > 0$، باید $a_{n+2} < a_n$؛ و اگر $a_n > 1$، آنگاه $a_{n+2} > a_n$. به بیان دیگر، دنبالهٔ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ نزولی و از پائین کراندار است و بنابراین همگرا می‌باشد. به صورت مشابه، دنبالهٔ $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و از بالا کراندار است و بنابراین همگرا می‌باشد. در هر دو مورد، اگر مقدار حد را ℓ بنامیم، آنگاه $\ell = \frac{2}{1+\ell}$. در نتیجه $\ell = 1$ یا $\ell = -2$، که با توجه به مثبت بودن a_n ها، نتیجه می‌گیریم $\ell = 1$.

۲– مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}}$ را محاسبه کنید. (۲/۵ امتیاز)

حل– با توجه به اینکه اگر $|a| < 1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$، و با استفاده از تصاعد هندسی، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right) \div \left(1 - \frac{-1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{1-0} \div \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}$$

۳– تمام ریشه‌های هشتم عدد مختلط $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ را بدست آورید. (۲/۵ امتیاز)

حل– با توجه به قضیهٔ دموآور و اینکه $1 + i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$ و $\sqrt{3} - i = 2\exp\left(\frac{-\pi}{6}i\right)$، داریم

$$\begin{aligned}
\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} &= \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)}{2\exp\left(\frac{-\pi}{6}i\right)}} = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{5\pi i}{12}\right)} \\
&= \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\exp\left(\frac{1}{8}\Big(\frac{5\pi}{12} + 2k\pi\Big)i\right) = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\exp\left(\frac{5\pi}{96}i\right).\exp\left(k\frac{\pi}{4}i\right) \\
&= \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\exp\left(\frac{5\pi}{96}i\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, 7)
\end{aligned}$$

به بیان دیگر، اگر $z_\circ = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\exp\left(\frac{5\pi}{96}i\right)$، آنگاه جوابهای مسأله عبارتند از $z_\circ$، $z_\circ w$، $z_\circ w^2$، . . . و $z_\circ w^7$، که در آن $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. بنابراین $w^2 = i$، $w^3 = -\bar{w}$، $w^4 = -1$، $w^5 = -w$، $w^6 = -i$ و $w^7 = \bar{w}$.

۴– فرض کنید $n > 2$ و $z \neq 1$ یکی از ریشه‌های n ام عدد واحد است. نشان دهید مجموع $z + z^3 + \cdots + z^{2n-1}$ صفر است. (۲/۵ امتیاز)

حل– با توجه به اینکه $z^n = 1$ و $z^2 \neq 0$ داریم

$$z + z^3 + \cdots + z^{2n-1} = z + z(z^2) + z(z^2)^2 + \cdots + z(z^2)^{n-1} = \frac{(z^2)^n - 1}{z^2 - 1}$$

که صورت این کسر صفر، و مخرج آن مخالف صفر است.

۵– فرض کنید $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_\circ$ پیوسته است و $f(x_\circ)\neq \circ$. ثابت کنید یک همسایگی باز شامل $x_\circ$ وجود دارد که f بر آن مخالف صفر است. (۴ امتیاز)

حل– فرض کنیم $f(x_\circ)>\circ$ و $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_\circ)$. با توجه به تعریف حد، $\delta>\circ$ ای وجود دارد که اگر $|x-x_\circ|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(x_\circ)|<\frac{1}{2}f(x_\circ)$. در نتیجه

$$-\frac{1}{2}f(x_\circ)<f(x)-f(x_\circ)<\frac{1}{2}f(x_\circ)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}f(x_\circ)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_\circ)$$

پس $f(x)$ نیز مخالف صفر است. حالت $f(x_\circ)<\circ$ به صورت مشابه است.

۶– هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید: (۳+۳=۶ امتیاز)

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\Big(1+\sin(\pi x)\Big)^{\cot(\pi x)}$ ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\Big)$

حل–الف– فرض کنیم $f(x)=1+\sin(\pi x)$ و $g(x)=\cot(\pi x)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\Big(1+\sin(\pi x)\Big)^{\cot(\pi x)} &= \lim_{x\to 1} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 1}\exp\Big(g(x)(f(x)-1)\Big)\\ &= \lim_{x\to 1}\exp\Big((\cot(\pi x))(\sin(\pi x))\Big)=\lim_{x\to 1}\exp\Big(\cos(\pi x)\Big)\\ &= \exp(\cos(\pi))=e^{-1}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

ب– با فرض $y=1/x$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\Big) &= \lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\Big)\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\\ &= \lim_{y\to\circ}\frac{a+b+aby}{\sqrt{(1+ay)(1+by)}+1}=\lim_{y\to\circ}\frac{a+b+\circ}{\sqrt{1+1}+1}=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

که در اینجا a و b اعداد حقیقی دلخواهند.

۷– الف) قضیهٔ مقدار میانگین (لاگرانژ) را بیان کنید. ب) قضیه را اثبات کنید. ج) ثابت کنید که اگر $x>y>\circ$ و $p>1$، آنگاه $py^{p-1}(x-y)\leq x^p-y^p\leq px^{p-1}(x-y)$ (۱+۲+۲=۵ امتیاز)

حل– صورت و اثبات قضیه را در کتاب ببینید. در مورد قسمت (ج) تابع $f(t)=t^p$ را بر بازهٔ $[y;x]$ در نظر می‌گیریم. با توجه به قضیهٔ لاگرانژ، $c\in(y;x)$ آی وجود دارد که $x^p-y^p=pc^{p-1}(x-y)$. اما $p>1$ و لذا تابع $f'(t)=pt^{p-1}$ صعودی است. در نتیجه از $y<c<x$ نتیجه می‌گردد که $py^{p-1}<pc^{p-1}<px^{p-1}$. با ضرب طذفین این نامساویها در $x-y>\circ$، و سپس قرار دادن $pc^{p-1}(x-y)=x^p-y^p$، نامساوی مورد نظر اثبات می‌گردد.

۸– در نظر داریم پنجره‌ای به شکل زیر از جنس پروفیل بسازیم. در قسمت مستطیل شکل آن از شیشه‌ای استفاده می‌کنیم که در مقایسه با شیشهٔ بکار رفته در قسمت نیم دایره، به اندازهٔ ۱/۸ واحد نور عبور می‌دهد. اگر تنها $\ell_\circ=4+3\pi$ متر پروفیل در ساخت پنجره استفاده شود، ابعاد آن را چطور انتخاب کنیم تا مقدار نور عبور داده شده از آن حد اکثر باشد. (۵ امتیاز)

حل—اگر مقدار نور عبوری از یک واحد مربع از شیشهٔ بکار رفته برای ساخت قسمت نیم دایره را یک بگیریم، در این صورت، مقدار کل نور عبوری از نیم دایره برابر $\frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^{2} = \frac{\pi x^{2}}{8}$ و مقدار کل نور عبوری از مستطیل پائین برابر $\frac{1}{8} \times x \times y = \frac{xy}{8}$ است. پس در مجموع $L := \frac{1}{8}x(y + \pi x)$ واحد نور از پنجره عبور می‌کند. اما برای ساخت پنجره از دو قطعهٔ بطول x، دو قطعهٔ بطول y و یک نیم دایرهٔ بطول $\pi x/2$ استفاده می‌شود. پس در مجموع $2x + 2y + \pi x/2 = \ell_0$ مقدار پروفیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه $y = \ell_0/2 - (1 + \pi/4)x$، و بنابراین $L = \frac{1}{16}\ell_0 x - \frac{1}{32}(4 + 3\pi)x^{2} = \frac{1}{16}\ell_0(2x - x^{2})$. اکنون $L' = 0$ به معنی $x = \frac{2\ell_0}{4+3\pi} = 2$ است. بعلاوه $L'' = -\frac{1}{16}\ell_0 < 0$. پس $x = 2$ ماکزیمم موضعی L است. به این ترتیب، باید ابعاد پنجره را $x = 2$ و $y = \pi$ بگیریم.