دانشکده ریاضی

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی یک — ترم اول ۸۵—۱۳۸۴

۱— در همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ بحث کنید.

حل. با توجه به اینکه (به استقراء) به ازای هر $n\geq 2$ ای $n^n\geq n!$، داریم $n\ln n\geq \ln n!$ و بنابراین $\frac{1}{\ln n!}\geq\frac{1}{n\ln n}$. از طرفی تابع $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ بر فاصلهٔ $[2;\infty)$ مثبت و نزولی است؛ و بنابراین از آزمون انتگرال می‌توان استفاده نمود. از طرفی

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\lim_{R\to\infty}[\ln(\ln x)]_2^R=\lim_{R\to\infty}\ln(\ln R)-\frac{1}{\ln(\ln 2)}=+\infty$$

پس این انتگرال واگرا است، و بنابراین سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ واگرا است و در نتیجه سری داده شده نیز واگرا می‌باشد.

۲— در صورتی که $0\leq c$، فاصلهٔ همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}(n+c^n)x^n$ را تعیین کنید.

حل. ابتدا شعاع همگرایی سری را بدست می‌آوریم. چنانچه $0<c\leq 1$، در این صورت

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\leq\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+c^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$$

و بنابراین $R=1$. به ازای $x=\pm 1$، سری به $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n(n+c^n)$ تبدیل می‌گردد که حد جملهٔ عمومی آن صفر نیست. یعنی در این حالت دامنهٔ همگرایی $(-1;1)$ است.

ولی اگر $1<c$، در این صورت

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+c^n}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c^n+c^n}=c\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=c$$

در نتیجه $R=\frac{1}{c}$. به ازای $x=\frac{\pm 1}{c}$، سری به $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{n+c^n}{c^n}$ تبدیل می‌گردد که در این حالت نیز سری واگرا است (حد جملهٔ عمومی آن صفر نمی‌شود). در این حالت دامنهٔ همگرایی $\left(-\frac{1}{c};\frac{1}{c}\right)$ است.

۳— مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را بدست آورید:

الف) $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x+\sin x+2}$ 　　ب) $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

ج) $\int x^2\cos^2 x\,dx$ 　　د) $\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$

حل. الف) از تغییر متغی تانژانت نصف قوس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x+\sin x+2}&=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+2}\frac{2dt}{1+t^2}\\&=\int\frac{4t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2t+3)}=\int\left(-\frac{3+t}{t^2+2t+3}+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+3)-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)\right)+\arctan t+C\end{aligned}$$

حل. ب) از تغییر متغیر $t=x^۲$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\int \frac{dx}{x^{۱۱}\sqrt{۱+x^۴}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{dt}{t^۶\sqrt{۱+t^۲}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{dt}{t^۶\sqrt{۱+t^۲}} = \frac{۱}{۲}\int t^{-۶}(۱+t^۲)^{-۱/۲}\,dt$$

که یک دو جمله‌ای دیفرانسیل با $p=-\frac{۱}{۲}$، $m=-۶$ و $n=۲$ است. چون $\frac{m+۱}{n}=-۳$، بنابراین فرض می‌کنیم $۱+t^۲=t^۲u^۲$. در نتیجه $t=(u^۲-۱)^{-۱/۲}$، $dt=-u(u^۲-۱)^{-۳/۲}\,du$ و

$$\int \frac{dx}{x^{۱۱}\sqrt{۱+x^۴}} = -\frac{۱}{۲}\int (u^۲-۱)^۲\,du = -\frac{u^۵}{۱۰}+\frac{u^۳}{۳}-\frac{u}{۲}+C$$

که در آن $u=\frac{۱}{t}\sqrt{۱+t^۲}=\frac{۱}{x^۲}\sqrt{۱+x^۴}$.

حل. ج) با استفاده از فرمول $\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}(۱+\cos(۲x))$، داریم

$$\begin{aligned}
\int x^۲\cos^۲ x\,dx &= \frac{۱}{۲}\int x^۲(۱+\cos(۲x))\,dx = \frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۴}\int x^۲\,d(\sin(۲x))\\
&= \frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۴}x^۲\sin(۲x)-\frac{۱}{۲}\int x\sin(۲x)\,dx = \frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۴}x^۲\sin(۲x)+\frac{۱}{۴}\int x\,d(\cos(۲x))\\
&= \frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۴}x^۲\sin(۲x)+\frac{۱}{۴}x\cos(۲x)-\frac{۱}{۴}\int\cos(۲x)\,dx\\
&= \frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۴}x^۲\sin(۲x)+\frac{۱}{۴}x\cos(۲x)-\frac{۱}{۸}\sin(۲x)+C
\end{aligned}$$

حل. د) ابتدا کسر داخل انتگرال را تجزیه می‌کنیم، و سپس از تغییر متغیرهای $u=x^۲+۲x+۳$ و $x+۱=\sqrt{۲}\tan v$ استفاده نموده و در آخر از فرمول دو برابر قوس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^۴+۴x^۳+۱۱x^۲+۱۲x+۸}{(x^۲+۲x+۳)^۲(x+۱)}\,dx = \int\left(\frac{x-۱}{(x^۲+۲x+۳)^۲}+\frac{۱}{x+۱}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{x+۱}{(x^۲+۲x+۳)^۲}+\frac{-۲}{(x^۲+۲x+۳)^۲}+\frac{۱}{x+۱}\right)dx = \frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u^۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\int\cos^۲ v\,dv+\ln(x+۱)+C\\
&= -\frac{۱}{۲u}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\int(۱+\cos(۲v))\,dv+\ln(x+۱)+C = -\frac{۱}{۲u}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}v-\frac{\sqrt{۲}}{۸}\sin(۲v))+\ln(x+۱)+C
\end{aligned}$$

که در آن $u=x^۲+۲x+۳$ و $v=\arctan\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)\right)$.

۴− مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

الف) $\displaystyle\int_۰^\pi \frac{x\,dx}{۱+\cos^۲ x}$ ب) $\displaystyle\int_۰^{\pi/۲}\cos^{۲n}x\,dx$

حل. الف) از تغییر متغیر $y=\pi-x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$I := \int_۰^\pi \frac{x\,dx}{۱+\cos^۲ x} = \int_\pi^۰ \frac{\pi-y}{۱+\cos^۲ y}(-dy) = \pi\int_۰^\pi\frac{dx}{۱+\cos^۲ x}+I$$

حال معادله را بر حسب I حل نموده و آنگاه از تغییر متغیر $y=\pi-x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{۲}\int_۰^\pi\frac{dx}{۱+\cos^۲ x} = \frac{\pi}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{dx}{۱+\cos^۲ x}+\frac{\pi}{۲}\int_{\pi/۲}^\pi\frac{dx}{۱+\cos^۲ x} = \frac{\pi}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{dx}{۱+\cos^۲ x}+\frac{\pi}{۲}\int_{\pi/۲}^۰\frac{-dy}{۱+\sin^۲ y}\\
&= \pi\int_۰^{\pi/۲}\frac{dx}{۱+\cos^۲ x} = \pi\int_۰^{\pi/۲}\frac{d\tan x}{۲+\tan^۲ x} = \pi\int_۰^\infty\frac{dt}{۲+t^۲} = \lim_{R\to\infty}\int_۰^R\frac{dt}{۲+t^۲}\\
&= \pi\lim_{R\to\infty}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\arctan\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}t\right)\Big|_۰^R = \frac{\sqrt{۲}}{۴}\pi^۲
\end{aligned}$$

حل. ب) با استفاده از قاعدهٔ جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{۲n} x\,dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{۲n-۱} x\,\cos x\,dx = \Big[\cos^{۲n-۱} x \sin x\Big]_{۰}^{\pi/۲} - \int_{۰}^{\pi/۲} \sin x\, d(\cos^{۲n-۱} x) \\ &= (۲n-۱)\int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲} x \cos^{۲n-۲} x\,dx = (۲n-۱)\int_{۰}^{\pi/۲} (۱-\cos^{۲} x)\cos^{۲n-۲} x\,dx = (۲n-۱)I_{n-۱} - (۲n-۱)I_n \end{aligned}$$

در نتیجه $I_n = \frac{۲n-۱}{۲n} I_{n-۱}$ و در نتیجه

$$I_n = \frac{۲n-۱}{۲n} \times \frac{۲n-۳}{۲n-۲} \times \cdots \frac{۳}{۲} I_{۰} = \frac{۳\times ۵\times \cdots (۲n-۱)}{۲\times ۴\times (۲n)}\frac{\pi}{۲}$$

۵− طول قوس قسمتی از منحنی نمودار تابع $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-۱}{e^x+۱}\right)$ و بین نقاط به طول $x=۲$ و $x=۴$ را بدست آورید.
حل. با توجه به فرمول طول قوس، داریم

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{۲}^{۴} \sqrt{۱+(f'(x))^{۲}}\,dx = \int_{۲}^{۴} \sqrt{۱+(\frac{۲e^x}{e^{۲x}-۱})^{۲}}\,dx = \int_{۲}^{۴} \frac{e^{۲x}+۱}{e^{۲x}-۱}\,dx = \int_{۲}^{۴} \frac{e^{۲x}}{e^{۲x}-۱}\,dx - \int_{۲}^{۴} \frac{e^{-۲x}}{e^{-۲x}-۱}\,dx \\ &= \left[\frac{۱}{۲}\ln(e^{۲x}-۱) + \frac{۱}{۲}\ln(e^{-۲x}-۱)\right]_{۲}^{۴} = \ln(e^{۲}+e^{-۲}) \end{aligned}$$

۶− در همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_{۱}^{\infty} \frac{(x^{۲}+\sqrt{x}+۳)\,dx}{x^{۴}+\sqrt[۵]{x+۲}+۱۰}$ بحث کنید.
حل. با توجه حد زیر و اینکه انتگرال ناسرهٔ $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}}$ همگرا است، انتگرال داده شده نیز همگرا است:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^{۲}+\sqrt{x}+۳}{x^{۴}+\sqrt[۵]{x+۲}+۱۰}}{\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{۴}+x^{۲}\sqrt{x}+۳x^{۲}}{x^{۴}+\sqrt[۵]{x+۲}+۱۰} = ۱$$