

به نام آنکه جان را حکمت آموخت

وقت: ۲ ساعت تاریخ: ۸۵/۱۰/۲۶

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی (۱)

۱. تابع $f(x) = e^{-x}$ را در فاصله $[0, \infty)$ در نظر می‌گیریم.

(الف) سطح ناحیه زیر منحنی و بالای محور x ها را محاسبه کنید. (۵ نمره)

(ب) حجم حاصل از دوران ناحیه فوق حول محور y ها را بدست آورید. (۵ نمره)

(ج) طول قوس منحنی تابع $f(x)$ را محاسبه نمایید. (۵ نمره)

۲. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int (1 + \ln x) \sqrt{1 + (x \ln x)^2} dx$ (۵ نمره)

(ب) $\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{x})^2 \sqrt{x^2 + x + 1}}$ (۵ نمره)

۳.

(الف) بسط ماکلورن (یا سری توانی) تابع $f(x) = \cosh x$ را بنویسید. (۵ نمره)

(ب) نشان دهید سری زیر همگرا بوده و مقدار همگرایی (مجموع سری) را محاسبه کنید. (۵ نمره)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{2^{n+1} n!}$$

(ج) حاصل انتگرال $\int_0^1 \cosh(x^2) dx$ را به صورت یک سری بنویسید. (۵ نمره)

۴.

(الف) در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ بحث کنید. (۵ نمره)

(ب) به ازای چه مقادیری از p سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^p}$ همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است؟ (۵ نمره)

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی (۱) دانشگاه صنعتی امیرکبیر وقت: ۲ ساعت زمان: ۸۶/۴/۴

۱. حاصل انتگرال های نامعین زیر را تعیین کنید:

$$\int \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \sin x} dx$$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

۲. الف: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2^n (n^2+n)}$ را تعیین کنید.

ب: مقدار سری را به ازای $x = \frac{8}{3}$ محاسبه کنید.

۳. برای محاسبه انتگرال $I_n = \int_0^1 x^n 2^n dx$ یک فرمول بازگشتی بنویسید. ($n = 0, 1, 2, \dots$)

۴. آزمون انتگرال را فقط بیان و سپس در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$ بحث کنید.

۵. سری مطلقاً همگرا و همگرای مشروط را تعریف کرده و سپس ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ مطلقاً همگراست.

۶. الف: بسط مک لورن تابع $f(x) = e^x$ را بنویسید.

ب: بدون استفاده از قاعده هوییتال حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$$

۷. الف: سری همگرا و سری واگرا را تعریف کنید.

ب: فقط با استفاده از تعریف بررسی کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ همگرا یا واگراست و در صورت همگرا بودن مقدار همگرایی آن را بدست آورید.