

تاریخ: ۸۴/۳/۲۲

وقت: ۱۲۰ دقیقه

(۱) حدود زیر را محاسبه کنید (۴/۵ نمره)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln \frac{x}{2} \right) \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$$

(۲) فرض کنید $f(x)$ بر $[0, 2]$ پیوسته و دوبار بر $(0, 2)$ مشتق پذیر باشد. هرگاه $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$

ثابت کنید عددی مانند $x_0 \in (0, 2)$ موجود است به طوری که $f''(x_0) = 0$ (۲ نمره)

(۳) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید: (۵/۵ نمره)

$$1) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \quad 2) \int \frac{dx}{(x^2 + 3)^3} \quad 3) \int \sqrt{\frac{x+1}{(x-1)^3}} dx, \quad x \geq 1$$

(۴) ثابت کنید هرگاه $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، آنگاه: (۲ نمره)

$$F'(x) = f(x)$$

(۵) حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به $y = x$ و $y^2 = 4x$ حول خط $x = 4$ را محاسبه کنید. (۲ نمره)

(۶) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید: (۲ نمره)

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

(۷) شعاع و بازه همگرایی سریهای زیر را معین کنید. (۲ نمره)

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$