شماره ردیف

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده رياضي

پاسخنـامـه امتحـان میـان‌ترم / پایـان‌ترم
دروس همـاهنگ

نام خانوادگی : . . . .   درس : . . . .

نـــام : . . . .   مدرس : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

دانشجوي محترم :

برای جلوگیری از هدر رفتن زحمات خود ، لطفا نکات زیر را به دقت مطالعه فرمایید :

۱- برگه های پاسخنامه را به هیچ عنوان از یکدیگر جدا نکنید.

۲- مشخصات و شماره ردیف خود را بر روی تمام برگه ها و به صورت خوانا بنویسید.

۳- از نوشتن با **مــداد** خودداری نمایید.

۴- هر سوال را در برگه مربوطه پاسخ دهید.

اگر برگه ای

فاقد مشخصات باشد ، با مداد نوشته شده باشد و یا در برگه مربوط به سوال دیگری نوشته شده باشد

چرکنویس محسوب شده و تصحیح نخواهد شد.

۵- استفاده از هرگونه ماشین حساب **مجاز نمی باشد**.

۶- در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نخواهد شد.

موفق باشید

پاسخ سوال ۱

دورترین و نزدیکترین نقاط بیضی $۳x^۲ - xy + ۳y^۲ = ۱۳$ از خط $۴x + ۱۱y = ۸۷$ را بیابید.

جواب :

اگر A یک نقطه از بیضی باشد فاصله آن تا خط را برابر است با : $d(A) = \frac{|۴x + ۱۱y - ۸۷|}{\sqrt{۱۶ + ۱۲۱}}$

از معادله بیضی می توان نتیجه گرفت که $-۳ < x, y < ۳$ بنابر این $d(A) = \frac{۸۷ - ۴x - ۱۱y}{\sqrt{۱۳۷}}$

اکنون برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ، تابع $f(x, y, \lambda) = \frac{۸۷ - ۴x - ۱۱y}{\sqrt{۱۳۷}} - \lambda(۳x^۲ - xy + ۳y^۲ - ۱۳)$

را در نظر می گیریم. باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} f_x = \frac{-۴}{\sqrt{۱۳۷}} - \lambda(۶x - y) = ۰ \\ f_y = \frac{-۱۱}{\sqrt{۱۳۷}} - \lambda(-x + ۶y) = ۰ \\ f_\lambda = -(۳x^۲ - xy + ۳y^۲ - ۱۳) = ۰ \end{cases}$$

چون $\lambda \neq ۰$ ، $۶x - y \neq ۰$ و $-x + y \neq ۰$ داریم : $\frac{۴}{۱۱} = \frac{۶x - y}{-x + ۶y}$ یعنی $-۴x + ۲۴y = ۶۶x - ۱۱y$

و در نتیجه $y = ۲x$ با توجه به شرط مساله $۳x^۲ - ۲x^۲ + ۱۲x^۲ = ۱۳$ یعنی $x = \pm ۱$

دو نقطه $A = (۱,۲)$ و $B = (-۱,-۲)$ بدست می آید که $d(A) = \frac{۶۱}{\sqrt{۱۳۷}}$ و $d(B) = \frac{۱۱۳}{\sqrt{۱۳۷}}$

پس نقاط A و B به ترتیب نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی از خط می باشند.

پاسخ سوال ۱

نام خانوادگی :	نام :	شماره دانشجویی :	نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۲

مقدار انتگرال $\int_C \frac{۱}{y}dx - \frac{x}{y^۲}dy + ۶zdz$ را بیابید که درآن C ، مسیری است شامل سه پاره خط که به ترتیب از نقاط $A_۱ = (-۵, ۱, ۱)$ ، $A_۲ = (۲, ۲, ۴)$ ، $A_۳ = (۵, ۴, ۵)$ و $A_۴ = (۲, ۲, ۵)$ می گذرد.

جواب :

این انتگرال مستقل از مسیر است زیرا تابع پتانسیل $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + ۳z^۲$ وجود دارد بطوری که

$$\int_C \frac{۱}{y}dx - \frac{x}{y^۲}dy + ۶zdz = \int_C \nabla f$$

بنابر این مقدار انتگرال برابر است با

$$\int_C \frac{۱}{y}dx - \frac{x}{y^۲}dy + ۶zdz = f(A_۴) - f(A_۱) = (\frac{۲}{۲} + ۳ \times ۵^۲) - (\frac{-۵}{۱} + ۳ \times ۱^۲) = ۷۶ - (-۲) = ۷۸$$

پاسخ سوال ۲

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

شماره ردیف

نمره

نام خانوادگی :　　　　نام :　　　　شماره دانشجویی :　　　　نام درس :

پاسخ سوال ۳

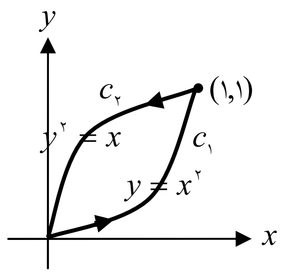
مساحت ناحیه محصور بین منحنی های $y = x^2$ و $y^2 = x$ را <u>فقط</u> به کمک انتگرالهای منحنی الخط (انتگرال روی مسیر) محاسبه کنید.

جواب :

اگر C یک مسیر ساده و بسته باشد مساحت ناحیه محدود به آن برابر است با :

$$S = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$

در این مساله مسیر C شامل دو مسیر هموار C_1 و C_2 است



بنابر این

$$S = \oint_{C_1} x\,dy + \oint_{C_2} x\,dy = \int_0^1 x(2x\,dx) + \int_1^0 x\left(\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^0 \frac{\sqrt{x}\,dx}{2} = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{x\sqrt{x}}{3}\right]_1^0$$

$$= \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

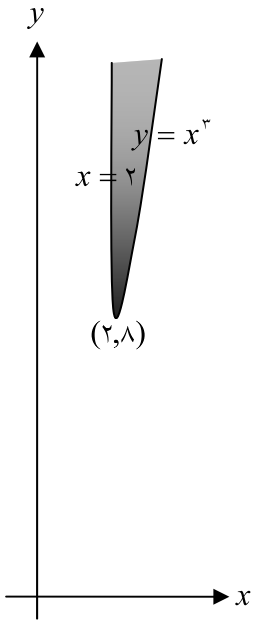
پاسخ سوال ۳

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

پاسخ سوال ۴

انتگرال دوگانه $\int_{8}^{\infty}\int_{2}^{\sqrt[3]{y}} \frac{dxdy}{x^6+y^2}$ را محاسبه کنید.

جواب :



ترتیب انتگرالگیری را عوض می کنیم :

$$\int_{y=8}^{\infty}\int_{x=2}^{\sqrt[3]{y}} \frac{dxdy}{x^6+y^2} = \int_{x=2}^{\infty}\int_{y=x^3}^{\infty} \frac{dydx}{x^6+y^2} = \int_{x=2}^{\infty}\left[\frac{1}{x^3}\arctan\frac{y}{x^3}\right]_{x^3}^{\infty} dx$$

$$= \int_{x=2}^{\infty}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx = \left[\frac{-\pi}{8x^2}\right]_{2}^{\infty} = \frac{\pi}{32}$$

پاسخ سوال ۴

نام خانوادگی :　　　نام :　　　شماره دانشجویی :　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره

پاسخ سوال ۵

حجم ناحیه محصور به رویه های $z=\sqrt{8-(x^2+y^2)}$ و $2z=x^2+y^2$ را بیابید.

جواب :

اشتراک این دو رویه یک دایره به معادله $x^2+y^2=4$ و $z=2$ است.

تصویر حجم مورد نظر بر روی صفحه xy ناحیه D است که عبارت است از $x^2+y^2\leq 4$.

بنابر این حجم مورد نظر برابر است با

$$V=\iint_D (z_2-z_1)\,dxdy=\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\sqrt{8-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)r\,d\theta dr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{2}\left(r\sqrt{8-r^2}-\frac{r^3}{2}\right)dr=2\pi\left[-\left(\sqrt{8-r^2}\right)^3-\frac{r^4}{8}\right]_0^2=2\pi(-8-2+16\sqrt{2})=4\pi(8\sqrt{2}-5)$$

پاسخ سوال ۵

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :	نام :	شماره دانشجویی :	نام درس :

شماره ردیف

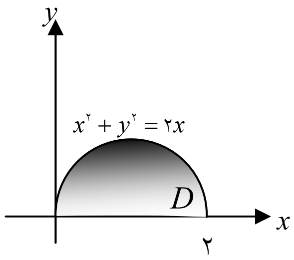
نمره

پاسخ سوال ۶

مساحت قسمتی از رویه $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ که درون استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲x$ قرار دارد را بیابید.

جواب :

هر دو رویه نسبت به صفحات xy و xz متقارن هستند بنابر این قسمتی از سطح را که در یک هشتم اول قرار دارد در نظر می گیریم و مساحت بدست آمده را ۴ برابر می کنیم. بنابر این



$$S = ۴\iint_D \sqrt{۱ + z_x^۲ + z_y^۲}\, dxdy$$

اما $z_x = \dfrac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}\ ,\ z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$

در نتیجه $\sqrt{۱ + z_x^۲ + z_y^۲} = \dfrac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$ **یعنی** $S = ۴\iint_D \dfrac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}\, dxdy$

اکنون به کمک مختصات قطبی انتگرال را حل می کنیم. داریم : $x^۲ + y^۲ = ۲x \quad \rightarrow \quad r = ۲\cos\theta$

$$S = ۴\iint_D \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}\, dxdy = ۸\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{r=۰}^{۲\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{۴ - r^۲}}\, dr d\theta$$

$$= ۸\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} [-\sqrt{۴ - r^۲}\,]_۰^{۲\cos\theta}\, d\theta = ۸\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۲ - ۲\sin\theta)\, d\theta = ۱۶[\theta + \cos\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= ۸(\pi - ۲)$$

پاسخ سوال ۶

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :   نام :   شماره دانشجویی :   نام درس :   **شماره ردیف**

نمره

پاسخ سوال ۷

اگر $\vec{F}=(2yz, z\cosh x, y+z^2)$ یک تابع برداری و S سطح خارجی رویه $z=x^2+y^2$ در بازه $0\le z\le 9$ باشد ، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را بیابید. (توجه : $dS=d\sigma$)

جواب :

روش اول : داریم $\vec{n}=\dfrac{(2x,2y,-1)}{|(2x,2y,-1)|}=\dfrac{1}{\sqrt{4z+1}}(2x,2y,-1)$ بنابر این $\vec{F}\cdot\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{4z+1}}(4xyz+2yz\cosh x-y-z^2)$

$dS=\sqrt{4z+1}\,dxdy$. تصویر رویه S بر صفحه xy عبارت است از ناحیه $x^2+y^2\le 9$ که آن را D می نامیم.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S (4xyz+2yz\cosh x-y-z^2)dxdy$$

$$=\iint_D (4xy(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)\cosh x-y-(x^2+y^2)^2)dxdy$$

$$=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}[(4x^3+2x^2\cosh x-1)y+(4x+2\cosh x)y^3-x^4-2x^2y^2-y^4]dydx$$

$$=-2\int_{-3}^{3}(x^4+\frac{2}{3}x^2(9-x^2)+\frac{1}{5}(9-x^2)^2)\sqrt{9-x^2}\,dx=-\frac{2}{5}\int_{-3}^{3}(\frac{8}{3}x^4+12x^2+81)\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{2}{5}\times 3^5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^4\theta+4\sin^2\theta+3)(\cos^2\theta)\,d\theta=-\frac{2}{5}\times 3^5(8\times\frac{\pi}{16}+4\times\frac{\pi}{8}+3\times\frac{\pi}{2})$$

$$=-3^5\pi$$

یعنی

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-3^5\pi}$$

روش دوم : S' را سطح دایره $x^2+y^2\le 9$ و $z=9$ (به سمت بالا) در نظر می گیریم. $S\cup S'$ یک سطح بسته است و حجم محدود به آن را V می نامیم. خواهیم داشت :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V div\vec{F}dV \qquad (*)$$

$$\iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S'}(y+z^2)dS=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(y+81)dydx=2\times 3^4\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=2\times 3^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta=3^6\pi$$

$$\iiint_V div\vec{F}dV=\iiint_V 2z\,dV=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\int_{z=r^2}^{9}2r\,z\,dzdrd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}r(81-r^4)drd\theta=2\pi(81\times\frac{9}{2}-\frac{3^6}{6})=(3^6-3^5)\pi$$

با توجه به (*) خواهیم داشت :

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-3^5\pi}$$

پاسخ سوال ۷

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.