

امتحان پایان ترم ریاضی (۲) دانشگاه صنعتی امیرکبیر وقت: ۱۲۰ دقیقه ۸۶/۴/۱۰

۱. مساحت ناحیه‌ای که مختصات قطبی و کارتزین نقاط آن، در روابط زیر صدق می‌کنند را حساب کنید. (۵ نمره)

$$2 \leq r \leq 2 + \cos \theta$$

$$\sqrt{2} \leq x, 0 \leq y$$

۲. مساحت سطح قسمتی از رویه $x^2 + z^2 = a^2$ که داخل رویه $x^2 + y^2 = a^2$ قرار می‌گیرد را حساب کنید. (۵ نمره)

۳. با استفاده از مختصات کروی نشان دهید: (۵ نمره)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-k(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz = \frac{2\pi}{k^2} \quad 0 < k$$

۴. الف) اگر معادله رویه‌ای در دستگاه استوانه‌ای به صورت $z = g(r, \theta)$ باشد، ثابت کنید $d\sigma$ عنصر مساحت (جزء مساحت) آن، در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر است. (۵ نمره)

$$d\sigma = \sqrt{r^2 g_r^2 + g_\theta^2 + r^2} dr d\theta$$

ب) رویه S را به معادله $z = \theta$ در دستگاه استوانه‌ای در نظر بگیرید. مساحت قسمتی از این رویه که روی ناحیه $0 \leq \theta \leq \pi$ و $r \leq 1$ قرار دارد را حساب کنید. (۵ نمره)

۵. الف) صورت قضیه استوکس را با ذکر جزئیات بیان کنید. (۵ نمره)

ب) فرض کنید S قسمتی از رویه $x = y^2$ باشد که محدود به صفحات $z = 0$ و $z = 2$ و $x = 4$ باشد، درستی قضیه استوکس را، با محاسبه، برای میدان برداری $\vec{F} = z\vec{i} + (y+z)\vec{j} + y^2\vec{k}$ بررسی کنید. (۱۰ نمره)