

بسم الله الرحمن الرحيم  
اللهم صل على محمد و آل محمد



**WWW.EGZA.TK**

نام درس: توابع مختلط

۹، ۱۰، ۸۶

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

(ساعت ۸۱۳)

کد درس: ۲۳۱۲۰۲

تعداد سوال: فنی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

WWW.EGZA.TK تعداد کل صفحات: ۳

۱- اگر  $z = (-i)^i$  آنگاه  $|z|$  برابر است با:

- الف. ۱      ب.  $e^{\frac{\pi}{2}}$       ج.  $e^{\frac{3\pi}{2}}$       د.  $e^{\frac{3\pi}{2}}$

۲- اگر  $z = e^{i\pi}$  آنگاه  $i^z$  برابر است با:

- الف. ۱      ب. -۱      ج.  $i$       د.  $-i$

۳- اگر  $z = \frac{i-1}{i}$  آنگاه یک مقدار از  $\arg z$  برابر است با

- الف.  $\frac{\pi}{6}$       ب.  $\frac{\pi}{4}$       ج.  $\frac{\pi}{3}$       د.  $\frac{\pi}{2}$

۴- قسمت حقیقی تابع مختلط  $e^{i\bar{z}}$  کدام است؟

- الف.  $e^x \cos y$       ب.  $e^x \sin y$       ج.  $e^y \cos x$       د.  $e^y \sin x$

۵- در مورد تابع  $f(z) = |z|^2$  کدام گزینه نادرست است؟

- الف.  $f$  در  $z = 0$  پیوسته است      ب.  $f$  در  $z = 0$  مشتق پذیر است  
ج.  $f$  در  $z = 0$  تحلیلی است      د.  $f$  در  $z = 0$  دارای بسط سری لوران نمی باشد.

۶- کدام یک از توابع مختلط زیر، یک تابع تام نمی باشد؟

- الف.  $e^{-z}$       ب.  $e^{iz}$       ج.  $e^{\bar{z}}$       د.  $e^{-iz}$

۷- تابع مختلط  $f(z)$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی نامیده می شود اگر:

- الف.  $f$  در یک همسایگی محذوف از  $z_0$  مشتق پذیر باشد.  
ب.  $f$  در یک همسایگی از  $z_0$  مشتق پذیر باشد.  
ج.  $f$  در هر همسایگی محذوف از  $z_0$  مشتق پذیر باشد.  
د.  $f$  در هر همسایگی از  $z_0$  مشتق پذیر باشد.

۸- جوابهای معادله  $\log z = i\frac{\pi}{2}$  عبارتند از:

- الف.  $z = -i$       ب.  $z = \pm i$       ج.  $z = i$       د.  $z = \pm 1$

۹- اگر  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$  آنگاه نمودار معادله  $\text{Im } f(z) = 1$  در صفحه مختلط عبارت است از:

- الف. خط  $\text{Im } z = \text{Re } z$       ب. خط  $\text{Im } z = -\text{Re } z$   
ج. محور حقیقی      د. محور موهومی

نام درس: توابع مختلط  
رشته تحصیلی: مگرایبی: ریاضی  
کد درس: ۲۴۱۲۰۲

تعداد سؤالات: نفي ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵  
زمان امتحان: تشریحی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه  
تعداد کل صفحات: ۳

WWW.EGZA.TK

۱۰- یک مزدوج موزون برای تابع  $e^x \cos y$  عبارت است از تابع:

- الف.  $e^x \cos x$     ب.  $e^y \cos x$     ج.  $e^x \sin y$     د.  $e^y \sin x$

۱۱- اگر تابع غیر صفر  $f$  روی یک ناحیه از صفحه، تحلیلی باشد آنگاه:

- الف.  $f$  روی آن ناحیه، دارای هیچ صفری نیست.  
ب.  $f$  روی آن ناحیه، تعدادی متناهی صفر دارد.  
ج. مجموعه صفرهای  $f$  روی آن ناحیه، دارای نقطه حدی است.  
د.  $f$  روی آن ناحیه، تعدادی نامتناهی صفر دارد.

۱۲- همگرایی سری هندسی  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  روی کدام ناحیه، بگنواخت است؟

- الف.  $\{z \mid |z| > 1\}$     ب.  $\{z \mid |z| < 1\}$     ج.  $\{z \mid |z| < r < 1\}$     د.  $\{z \mid |z| > 1\}$

۱۳- در مورد تابع  $f(z) = \frac{1}{z}$  کدام گزینه نادرست است؟

- الف. هر خط که از مبدأ می گذرد را به خطی که از مبدأ می گذرد تبدیل می کند.  
ب. هر خط که از مبدأ نمی گذرد را به دایره‌ای که از مبدأ می گذرد تبدیل می کند.  
ج. مجموعه خط ها و دایره ها را به مجموعه خط ها و دایره ها تبدیل می کند.  
د. هر خط را به یک دایره و هر دایره را به یک خط تبدیل می کند.

۱۴- تبدیل خطی کسری که نقاط  $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$  را به ترتیب به نقاط  $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$  می نگارد کدام است؟

- الف.  $w = \frac{1}{z}$     ب.  $w = \frac{-1}{z}$     ج.  $w = \frac{1}{z-i}$     د.  $w = \frac{1-i}{z}$

۱۵- نقطه  $z = 0$  نقطه تکین قابل رفع کدام تابع است؟

- الف.  $\frac{e^z - 1}{z^2}$     ب.  $\frac{\cos z}{z}$     ج.  $\frac{1}{e^z}$     د.  $\frac{\sin z}{z}$

۱۶- مانده تابع  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  در نقطه  $z = 0$  کدام است؟

- الف. صفر    ب. ۱    ج. -۱    د. ۱

۱۷- مقدار  $\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(x^p + 1)^2}$  برابر است با:

- الف.  $\frac{\pi}{4}$     ب.  $-\frac{\pi}{4}$     ج.  $\frac{\pi}{2}$     د.  $-\frac{\pi}{2}$

نام درس: توابع مختلط  
رشته تحصیلی: مگرایبی: ریاضی  
کد درس: ۲۴۱۲۰۲

تعداد سؤالات: نفي ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵  
زمان امتحان: تشریحی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه  
تعداد کل صفحات: ۳

۸۶، ۱۰، ۹  
(۸۳، ۸۴)

۱۸- مقدار  $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$  که  $C$  دایره  $|z + i| = 1$  می باشد کدام است؟

- الف.  $2\pi$     ب.  $-2\pi$     ج.  $-\pi$     د.  $\pi$

۱۹- مانده تابع  $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}$  در نقطه  $z = 1$  برابر است با:

- الف.  $\pi$     ب.  $-e$     ج.  $\frac{1}{e}$     د.  $-\pi$

۲۰- مقدار انتگرال  $\int_C (x^y + iy^x) dz$  که  $C$  نیمه راست دایره  $|z| = 1$  می باشد کدام است؟

- الف.  $\frac{2}{3}(1-i)$     ب.  $-\frac{1}{3}(1+i)$   
ج.  $-\frac{1}{3}(1-i)$     د.  $\frac{1}{3}(1+i)$

سئوالات تشریحی:

۱- تابع مختلط  $f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$  در کدام ناحیه، تحلیلی است؟ مشتق آن را محاسبه کنید.

۲- نشان دهید که تابع  $\sin x \cosh y$  موزون است و مزدوج موزون آن را بدست آورید.

۳- قضیه لیرویل را بیان و اثبات کنید.

۴- انتگرال های  $\int_{|z|=1} \frac{z^2 + e^z}{z(z-3)} dz$  و  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 1}$  را محاسبه کنید.

۵- با استفاده از حساب مانده ها ثابت کنید  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta} = \frac{\pi}{2}$

نام درس: توابع مختلط

رشته تحصیلی: گرایش ریاضی

کد درس: ۲۲۱۲۰۲ تاریخ: ۸۶/۳/۱۶ شروع: ۸:

تعداد سوال: نسی ۲۰ تکلیفی -- تفریحی ۵

زمان امتحان: نسی و تکلیفی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

WWW.EGZA.TK

\* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۱. فرض کنیم  $S = \left( \frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha} \right)^n$ ,  $n \in N$  در اینصورت  $S$  برابر است با:

الف.  $\frac{1-itgna}{1+itgna}$  ب. ۱ ج.  $\frac{1+itgna}{1-itgna}$  د.  $i$

۲. اگر  $Z = \frac{-\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$  باشد آنگاه یک مقدار از  $\arg Z$  برابر است با:

الف.  $\frac{2\pi}{3}$  ب.  $\frac{4\pi}{3}$  ج.  $\frac{\pi}{6}$  د.  $\frac{\pi}{4}$

۳. مجموعه  $A = \left\{ Z_n \mid Z_n = \frac{(-1)^n(1+i)(n-1)}{n} \right\}$  داده شده نقاط حدی آن برابر است با:

الف.  $1-i$  ب.  $\pm(i-1)$  ج.  $\pm(i+1)$  د. نقطه حدی ندارد.

۴. جواب معادله  $\arg z = \frac{\pi}{6}$  در کدام گزینه زیر آورده شده است؟ ( $t > 0$ )

الف.  $z = t(\sqrt{3} + i)$  ب.  $z = t(\sqrt{3} - i)$  ج.  $z = t(1+i)$  د.  $z = t\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)$

۵. اگر  $f(z) = \frac{3z+1}{z}$  باشد کدام گزینه زیر درست می باشد؟

الف.  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{3x(x^2+y^2)+1}{x^2+y^2}$  ب.  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{3x^2+3y^2+x}{x^2+y^2}$

ج.  $\operatorname{Im} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}$  د.  $\operatorname{Im} f(z) = 1$

۶. ناحیه‌ای که توسط  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{x^2}\right) = 1$  تعیین می شود چه نام دارد؟

الف. سهمی ب. هذلولوی ج. بیضی د. خط



WWW.EGZA.TK

$$۷. تابع  $f(z) = \begin{cases} \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} + i \frac{x^r + y^r}{x^r + y^r} & ; z = x + iy \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$  داده شده کدام گزینه زیر درست می باشد؟$$

الف.  $f(z)$  در نقطه  $(0, 0)$  در روابط کشی - ریمان صدق نمی کند. ب.  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$

ج. تابع  $f$  در  $z = 0$  مشتق ندارد. د.  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = i$

۸. یک مزدوج موزون تابع  $U(x, y) = \sin(x^r - y^r) \cosh(rxy)$  در کدام گزینه زیر داده شده است؟

الف.  $V(x, y) = \cos(x^r - y^r) \cosh(rxy)$  ب.  $V(x, y) = \sin(rxy) \cosh(x^r - y^r)$

ج.  $V(x, y) = \sinh(x^r - y^r) \sin rxy$  د.  $V(x, y) = \cos(x^r - y^r) \sinh(rxy)$

۹. کدام گزینه زیر درست می باشد؟

الف. صفرهای  $\sin z$  همگی اعداد مختلط هستند. ب. صفرهای  $\cos z$  همگی مختلطاند.

ج. صفرهای  $\sin z$  همگی اعداد حقیقی اند. د. مجموعه صفرهای  $\sin z$  متناهی است.

۱۰. اگر  $z = re^{i\theta}$  و  $z \neq 1$  باشد قسمت حقیقی  $\ln(z-1)$  کدام است؟

الف.  $\ln(1 + r \cos \theta + r^2)$  ب.  $\frac{1}{r} \ln(1 - r \cos \theta + r^2)$

ج.  $\frac{1}{r} \ln(1 - r \cos \theta + r^2)$  د.  $\operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta} \right)$

۱۱. تبدیل خطی - کسری که نقاط  $z_1 = \infty$  و  $z_2 = i$  و  $z_3 = 0$  را به ترتیب به  $w_1 = 0$  و  $w_2 = i$  و  $w_3 = \infty$  بنگارد

در کدام گزینه زیر آورده شده است؟

الف.  $w = \frac{1}{z}$  ب.  $w = \frac{1}{z-i}$  ج.  $w = \frac{1-i}{z}$  د.  $w = \frac{-1}{z}$

۱۲.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \left( \frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$  برابر است با:

الف. صفر ب. ۱ ج. وجود ندارد د.  $i$



WWW.EGZA.TK

۱۳. مجموعه نقاط داخل بیضی  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  در صفحه اعداد مختلط دارای چه معادله‌ای است؟

الف.  $|z - \pi i| + |z - i| < 4$

ب.  $|z - i| + |z + i| < 4$

ج.  $|z + \pi i| - |z + i| < 1$

د.  $|z + \pi i| < 4$

۱۴. تصویر دایره  $w = 0$  ،  $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$  ،  $A \neq 0$  تحت  $w = \frac{1}{z}$  چیست؟

الف. دایره‌ای است که از مبدأ می‌گذرد.

ب. دایره‌ای است که از مبدأ نمی‌گذرد.

ج. هذلولوی است.

د. یک خط می‌باشد.

۱۵. اگر  $C$  منحنی  $y = 2x^2$  ،  $0 \leq x \leq 1$  باشد مقدار  $\int_C (\text{Im } z) dz$  چیست؟

الف.  $\frac{2}{3} + \pi i$

ب.  $\frac{1}{3} + i$

ج.  $i$

د. صفر

۱۶. اگر  $C$  دایره  $|z| = 2$  از نقطه  $z_1 = 2$  تا  $z_2 = \pi i$  و  $S = \left| \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} \right|$  آنگاه کدام گزینه زیر درست می‌باشد؟

الف.  $S \leq \frac{\pi}{6}$

ب.  $S \leq \frac{\pi}{4}$

ج.  $S \leq \frac{\pi}{3}$

د.  $S \leq \frac{\pi}{8}$

۱۷. فرض کنیم  $C$  منحنی  $|x| + |y| = 1$  باشد مقدار انتگرال  $\int_C \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz$  چیست؟ (مقدار  $C$  در جهت دایره مثبتانی فرض شده)

الف.  $\frac{\pi i}{3}$

ب. صفر

ج.  $\frac{\pi i}{2}$

د.  $\pi i$

۱۸. فرض کنیم  $0 < |z| < 1$  بسط لوران  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  روی ناحیه مذکور چیست؟

الف.  $-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}$

ب.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$

ج.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

د.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1}$

۱۹.  $\text{Res}\left[e^{\frac{3}{z-2}}, 2\right]$  برابر چند است؟

الف. ۲

ب. ۳

ج. ۱

د. صفر



WWW.EGZA.TK

۲۰. تابع  $f(z) = \cos \frac{1}{z}$  داده شده  $z = 0$  برای این تابع دارای کدام خاصیت زیر است؟

- الف. تکین اساسی است. ب. تکین رفع شدنی است. ج. قطب ساده است. د. صفر مرتبه دوم است.

سوالات تشریحی:

۱. الف. مزدوج موزون  $U(x, y) = y^x - 3x^y y$  را نوشته تابع تحلیلی مربوط به آنرا تعیین کنید.

ب. نشان دهید تابع  $U(x, y) = a(x^y + y^x) + bx + cy + d$ ,  $a \neq 0$ , قسمت حقیقی یا موهومی هیچ تابع

تحلیلی نیست.

۲. الف. مجموعه  $S_k = \{z = x_0 + iy \mid 2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi\}$  داده شده تصویر این مجموعه تحت تابع

$f(z) = e^z$  چیست؟

ب. تصویر ناحیه  $x^y - y^x < 4$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ، بوسیله نگاشت  $w = z^y$  را تعیین کنید.

۳. نامساوی کوشی را نوشته ثابت کنید.

۴. با ذکر دلیل انتگرال‌های زیر را تعیین کنید. (جهت منحنی‌ها مثلثاتی فرض شود.)

(الف)  $\int_{|z|=r} \frac{z dz}{(9-z^2)(z+i)}$

(ب)  $\int_{|z|=r} z^y e^{-z} dz$

۵. با استفاده از قضیه مانده‌ها مطلوبت محاسبه انتگرال زیر:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin r \theta d\theta}{1 + r \rho \cos \theta + \rho^2}$$

