

1- اگر خرگوشی از مبدا مختصات در جهت مثبت محور y ها و با سرعت ثابت a شروع به دویدن کند و همزمان با آن سگی از نقطه $(0, c)$ با سرعت ثابت b به تعقیب او بپردازد آنگاه معادله مسیر سگ از رابطه

$$y = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{a}{b}} - \left(\frac{c_1}{x}\right)^{\frac{a}{b}} \right] dx + C_2$$

بدست می‌آید. با فرض اینکه $a=b=c=5$ ثابتهای C_1 و C_2 را بیابید و نشان دهید که سگ به خرگوش نخواهد رسید. (راهنمایی

$$y(5) = 0 \text{ و } y'(5) = 0$$

2- با استفاده از قضیه تیلور یک سری توانی حول $x = 0$ برای تابع $y = f(x) = e^x$ بیابید سپس شعاع همگرایی آن را مشخص کنید.

3- معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = 0$ را به روش استفاده از معادله شاخص و سپس به روش سریها حل کنید در نهایت نتیجه بگیرید هر دو جواب با اختلاف دوتا ثابت یکسانند.

1- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

ب) $y = t^5 e^{-7t}$

ج) $y = \frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$

الف) $y = \sqrt{t}$

هـ) $y = \begin{cases} t & 0 < t < 4 \\ a & 4 \leq t \leq 5 \\ t^2 & t \geq 5 \end{cases}$

و) $L(y') = L(y'(t)) = ?$

د) $y = \sinh t$

5- معادلات زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

الف) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t} \sin t$

ب) $y = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-\tau) y(\tau) d\tau$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

6- یک معادله دیفرانسیل مثال بزنید که در نقطه $x = 5$ نقطه غیرعادی منظم داشته باشد. سپس روش حل آنرا توضیح دهید.

7- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

الف) $xy' + y = y^2 \ln x$

ج) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$

ب) $5x^2 - 3xy' - 2y = 0$

د) $x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} \frac{y}{x} + xy)$

موفق باشید

نمونه ب)

2- معادله دیفرانسیل‌های زیر را حل کنید.

$$(xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$$

$$(x \cos^2(\frac{y}{x}) - y)dx + xdy = 0$$

$$[1 + y^2 + xy^2]dx + (x^2y + y + 2xy)dy = 0$$

3- معادله دیفرانسیل‌های زیر را حل کنید. (یک مورد را حل کنید).

I) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ (کاهش مرتبه)

II) $y' = y - xy^3e^{-2x}$ (برنولی)

4- یکی از دو معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$2t ds + s(2 + s^2t)dt = 0$$

$$y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$$

4- مسیرهای قائم خانواده دسته منحنی $x = c \exp(y^2)$ را بدست آورید.

5- یکی از دو معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$$

$$2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$$

6- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

9- دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$$

10- به کمک سریها معادله دیفرانسیل $y'' - xy' = 0$ را حل کنید.

موفق باشید

1- مسیر قائم دسته منحنی $y = x + ce^{-x}$ را بدست آورید

2- معادله دیفرانسیل زیر مفروض است.

ابتدا ثابت کنید معادله کامل است سپس آن را حل نمائید.

$$(2xy^3 + y\cos x)dx - (3x^2y^2 + \sin x)dy = 0$$

3- مطلوب است حل معادله دیفرانسیل روبرو:

$$xdy = (y + x^2 + 9y^2)dx$$

4- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$$

5- معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - xy' + P^2y = 0$ مفروض است که در آن P عدد

ثابت است.

الف) دو جواب مستقل خطی به صورت سری توانی از این معادله را بدست

آورید.

ب) نشان دهید که هرگاه $P=3$ ، جوابی برای معادله به صورت چندجمله‌ای

وجود دارد.

6- دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

7- با استفاده از تبدیل لاپلاس یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل

زیر پیدا کنید.

$$xy'' + 2(x-1)y' + (x-2)y = 0$$

8- به کمک انتگرال تبدیلات لاپلاس ثابت کنید $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$

9- اگر $y_1 = \frac{1}{x}$ یک جواب معادله همگن مربوط به معادله زیر باشد مطلوب

است y_2 و جواب خصوصی معادله ناهمگن

$$(4x^2 - x)y'' + 21(2x-1)y' - 4y = 12x^2 - 6x$$

موفق باشید

1- معادله ریکاتی $y'+2y+y^2=0$ ، $y_1=-2$ را حل کنید.

2- معادله $y'=\frac{y}{x+\sqrt{xy}}$ ، $x>0$ را حل کنید.

3- هرگاه $y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$ برای $x>0$ جواب معادله $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ باشد، جواب

عمومی معادله $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=x$ را به دست آورید.

4- جواب عمومی معادله $y''-3y'+3y-y=0$ را با شرایط اولیه $y'(0)=y''(0)=0$ ، $y(0)=1$ به دست آورید.

5- نقاط عادی و منفرد (منظم و نامنظم) معادله $(\sin x)y''-y=0$ را مشخص کنید.

6- معادله $xy'-y-x-1=0$ را برحسب یک سری توانی از $(x-1)$ حل کنید.

7- نشان دهید $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و با استفاده از آن مقادیر $(\frac{5}{2})!$ و $(\frac{-3}{2})!$ را به دست آورید.

8- تبدیل لاپلاس توابع الف) $f(t)=\int_0^t e^{2x}\cos 3x dx$ و ب) $f(t)=\frac{d}{dt}(te^{3t})$ را به دست آورید.

9- تبدیل معکوس لاپلاس توابع الف) $F(s)=\frac{s+3}{s^3-s}$ و ب) $F(s)=\ln(\frac{s+3}{s-2})$ را به دست آورید.

10- دستگاه معادلات زیر را به کارگیری تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 6y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 7y + 1, \quad x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید

1- مسيرهاي قائم دسته منحنی زیر را بنویسید (حل معادله دیفرانسیل که بدست می آید ضروری است)

$$y^2 = \frac{x}{2a-x}$$

2- معادله منحنی را بنویسید که شیب خط قائم در هر نقطه 5 برابر طول آن نقطه باشد و منحنی از نقطه (1و1) بگذرد.

3- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = 1$$

4- معادله لاگرانژ زیر را حل کنید. $y = x(y')^2 + y'$

5- معادله دیفرانسیل زیر را به روش تغییر پارامترها حل کنید.

$$y''' + 4y'' - 5y' = e^{3x}$$

6- دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)y_1 + (D^2 + 1)y_2 = e^x \\ (D^2 + D)y_1 + D^2y_2 = e^{-x} \end{cases}$$

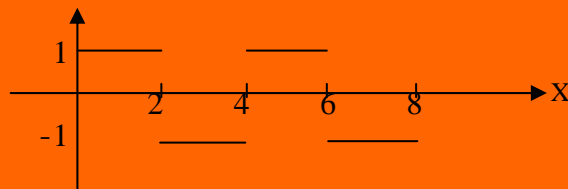
7- تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = \frac{e^{2t} - \cos t}{3t}$$

8- الف) فرض کنید تابع $f(t)$ پیوسته قطعه ای و متناوب با دوره تناوب P باشد نشان دهید:

$$L\{f\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ps}}$$

ب) به کمک الف) تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید (ابتدا تابع را به شکل تابع دوضابطه ای بنویسید).



9- تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را تعیین کنید.

$$F(s) = \frac{1}{s^3(s-1)}$$

10- بررسی کنید نقطه $x = 0$ نقطه معمولی برای معادله دیفرانسیل زیر است و سپس آنرا به کمک سریها حل کنید.

$$y'' - 2x^2y = 0$$

11- بررسی کنید نقطه $x = 0$ نقطه منفرد منظم برای معادله زیر است و سپس فرم جواب عمومی معادله را بدست آورید.

$$x^2(x+1)y'' + x^2(x-4)y' + 4y = 0$$

نمونه و)

1- معادله دیفرانسیل همه سهمی‌هایی را بیابید که محور آنها محور x ها باشد.

2- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید: (چهار مورد کافیست)

$$y' + y + y^2 = 2$$

$$(3x - y + 2)dx + (2x - 3y + 3)dy = 0$$

$$(y'')^2 - 2y'' - 2xy' + (y')^2 + x^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1$$

$$\frac{1}{x}dy + (4y - 8y^{-3})dx = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2 + x^3}, \quad (x > 0)$$

3- مقدار n را طوری تعیین کنید که منحنی‌های $x'' + y'' = C_1$ مسیرهای قائم

خانواده $y = \frac{x}{1 - C_2x}$ باشند.

4- جواب مسئله مقدار اولیه زیر را در مجاورت نقطه $x = 0$ تعیین کنید.

$$y'' + (\cos)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

5- به کمک تبدیلات لاپلاس، انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}(\cos 3t - 1)}{t} dt$$

6- به کمک تبدیلات لاپلاس، جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$y''(x) + 16y(x) = 5\cos 4x, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

7- نیم عمر ماده رادیواکتیوی 1450 سال است چند درصد از یک مقدار معین آن در 200 سال تجزیه می‌شود.

$$e^{-\frac{L_{n2}}{7.25}} \cong 0.91$$

موفق باشید

نمونه ز)

1- دو مورد از معادلات مرتبه اول زیر را حل کنید.

ب) $y' = \sin^2(x+y)$ ج) $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$

الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-4}$

2- برای معادله زیر عامل انتگرال ساز پیدا کرده و آنرا حل کنید.

$$(3y - 2xe^{-3x}) dx + dy = 0$$

3- معادله ریکاتی $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$ را با فرض $y_1 = \frac{1}{x}$ حل کنید.

4- معادلات مرتبه دوم زیر را حل کنید.

الف) $y'' = \sqrt{1+(y')^2}$ ب) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$

5- جواب عمومی معادله زیر را بنویسید (محاسبه ضرائب نامعین لازم نیست).

$$y'' - 4y' = xe^{4x} + (x-1)^2 + x \sin x$$

6- در معادله ناهمگن زیر یک جواب معادله همگن نظیر داده شده ($y_1 = e^x$) جواب عمومی را بدست آورید.

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x$$

7- معادله $y'' + 4y = 0$ را به روش سری حل کنید و سپس جواب خود را با

جوابهای بدست آمده از روشهای معمولی مقایسه کنید.

8- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

ب) $f(t) = t^2 \sin 3t$ ج) $f(t) = e^{3t} \sinh t$

الف) $f(t) = [2t]$

9- با استفاده از تبدیلات لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 16y = 5 \cos 4x \quad y(0) = y'(0) = 1$$

موفق باشید

1- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y' + (2x-1)y - y^2 = 1 - x + x^2 \quad y_1 = e^x$

ب) $y' = \frac{3x - y + 1}{2x + y - 2}$

ج) $(x^2 - 2y)dx + xdy = 0$

2- معادله مسیر قائم بر منحنی $x^2 + y^2 = 2ax$ را بیابید.

3 - معادلات زیر را حل کنید.

الف) $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0 \quad ; \quad y_1 = e^x$

ب) $(D^2 - 4)(D + 3)^2 y = x^5$

ج) $4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}} \ln x$ تغییر پارامتر

4- معادله $y'' + xy' + 3y = x + 3$ را به روش سریهای توانی حل نمائید.5- لاپلاس $f(x) = x^2 \sin 5x$ را بیابید.

6 - لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

الف) $F(s) = \frac{S}{s^2 - 4s + 10}$ ب) $G(s) = \frac{1}{s^4 + s^2}$

7- معادله زیر با به روش لاپلاس حل کنید.

$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad ; \quad y_0 = 2, \quad y'_0 = -1$

8- دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$