(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل(۱۰ گروه هماهنگ)**	نیمسال (اول/**دوم**) **۸۷-۱۳۸۶**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۷/۳/۲۱**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0 \quad , y(-1)=2$$

سوال۲- معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید : $x^2y''+xy'-y=\frac{1}{x+1}$ **۲۰ نمره**

سوال۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- دستگاه معادله ناهمگن مقابل را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$\begin{cases}(D+1)x+2y=e^t\\ 3x+(2D+1)y=t\end{cases}$$

سوال۵- با استفاده از تبدیل لاپلاس ، معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را حل کنید : **۲۰ نمره**

$$y''+4y=\begin{cases}1 & t<2\pi\\ t & 2\pi\le t\end{cases} \quad ; \quad y(0)=\frac{1}{4}\,,\ y'(0)=4$$

سوال۶- الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\sinh 2t}{t}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

ب) تبدیل معکوس تابع $F(s)=\frac{8+7s}{(s^2+1)^2}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال ۱

معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید :

$$\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy=0 \quad , y(-1)=2$$

جواب :

$$M=\frac{3-y}{x^2} \quad , \quad N=\frac{y^2-2x}{xy^2} \quad \to \quad M_y=\frac{-1}{x^2} \quad , \quad N_x=\frac{-1}{x^2}$$

بنابر این معادله کامل است.

$$f(x,y)=\int\frac{y^2-2x}{xy^2}dy=\frac{y}{x}+\frac{2}{y}+h(x)$$

$$f_x=M \quad \to \quad \frac{-y}{x^2}+h'(x)=\frac{3-y}{x^2} \quad \to \quad h'(x)=\frac{3}{x^2} \quad \to \quad h(x)=\frac{-3}{x}$$

پس جواب معادله عبارت است از $\frac{y}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{x}=c$

با توجه به شرط اولیه $y(-1)=2$ داریم $c=2$ $\quad \leftarrow \quad \frac{2}{-1}+\frac{2}{2}-\frac{3}{-1}=c$

جواب نهایی عبارت است از $\boxed{\frac{y-3}{x}+\frac{2}{y}=2}$

پاسخ سوال ۱

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۲

معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید : $x^2y'' + xy' - y = \frac{2}{x+1}$

جواب :

ابتدا معادله همگن $x^2y'' + xy' - y = 0$ را حل می کنیم که یک معادله اویلر است.

معادله مشخصه آن به صورت $m^2 + (1-1)m - 1 = 0$ و یا $m^2 - 1 = 0$ می باشد یعنی $m = \pm 1$

و جواب معادله همگن عبارت است از : $\boxed{y_h = c_1 x + \frac{c_2}{x}}$

اکنون به کمک روش تغییر پارامتر جواب خصوصی معادله غیر همگن را به شکل $y_p = ux + \frac{v}{x}$ حدس می زنیم

با این شرط که $u'x + \frac{v'}{x} = 0$. توابع u و v جوابهای دستگاه معادله $\begin{cases} u'x + \frac{v'}{x} = 0 \\ u' - \frac{v'}{x^2} = \frac{2}{x^2(x+1)} \end{cases}$ می باشند.

یعنی

$$u = \int \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{-1}{x} + \ln\frac{x+1}{x}$$

$$v = \int \frac{-1}{(x+1)}dx = -\ln(x+1)$$

در نتیجه : $y_p = -1 + x\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\ln(x+1)$

و در نهایت داریم :

$$\boxed{y_g = c_1 x + \frac{c_2}{x} - 1 + x\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}\ln(x+1)}$$

پاسخ سوال ۲

نام خانوادگی :　　　　نام :　　　　شماره دانشجویی :　　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۳

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ را بیابید.

جواب :

$x=0$ یک نقطه عادی معادله است پس جوابی به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد.

$$(1-x^2)y''-2xy'+12y=(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+12\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}12a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}12a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2+n-12)a_n]x^n=0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2-n+12)a_n=0\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$a_{n+2}=\frac{(n+4)(n-3)}{(n+2)(n+1)}a_n\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$n=0\rightarrow a_2=-6a_0\quad,\quad n=2\rightarrow a_4=-\frac{1}{2}a_2=3a_0\quad,\quad n=4\rightarrow a_6=\frac{4}{15}a_4=\frac{4}{5}a_0$$

$$n=1\rightarrow a_3=-\frac{5}{3}a_1\quad,\quad n=3\rightarrow a_5=0\quad,\quad n=5\rightarrow a_7=\frac{3}{7}a_5=0$$

یعنی جواب معادله عبارت است از :

$$\boxed{y=a_0(1-6x^2+3x^4+\frac{4}{5}x^6+\frac{3}{7}x^8+\cdots)+a_1(x-\frac{5}{3}x^3)}$$

پاسخ سوال ۳

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :　　　نام :　　　شماره دانشجویی :　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۴

دستگاه معادله ناهمگن مقابل را حل کنید : $\begin{cases}(D+1)x+2y=e^t\\3x+(2D+1)y=t\end{cases}$

جواب :

ابتدا معادله همگن را حل می کنیم : $\begin{cases}(D+1)x+2y=0\\3x+(2D+1)y=0\end{cases}$

با حذف y داریم $(2D^2+3D-5)x=0$ یعنی معادله مشخصه دستگاه عبارت است از $2D^2+3D-5=0$

که دو جواب حقیقی و متمایز $D_1=1$ و $D_2=-\frac{5}{2}$ دارد.

پس جواب دستگاه همگن به صورت $\begin{cases}x_h=Ae^t+Be^{-\frac{5}{2}t}\\y_h=A'e^t+B'e^{-\frac{5}{2}t}\end{cases}$ خواهد بود که پس از امتحان کردن آن در معادله اول داریم :

$(2A+2A')e^t+(-\frac{3}{2}B+2B')e^{-\frac{5}{2}t}=0$ یعنی $A'=-A$ و $3B=4B'$

و نهایتا جواب معادله همگن عبارت است از : $\begin{cases}x_h=Ae^t+4Be^{-\frac{5}{2}t}\\y_h=-Ae^t+3Be^{-\frac{5}{2}t}\end{cases}$

برای یافتن جواب خصوصی دستگاه پس از حذف y داریم : $(2D^2+3D-5)x=3e^t-2t$

یعنی

$$x_p=\frac{3}{2D^2+3D-5}(e^t)-\frac{2}{2D^2+3D-5}(t)$$

$$x_p=(3e^t)\frac{1}{2D^2+7D}(1)+\frac{2}{5-3D-2D^2}(t)$$

$$x_p=(3e^t)\frac{1}{D}(\frac{1}{7}+\cdots)(1)+2(\frac{1}{5}+\frac{3}{25}D+\cdots)(t)$$

$$x_p=\frac{3}{7}te^t+\frac{2}{25}(5t+3)$$

به کمک معادله اول خواهیم داشت : $2y_p=e^t-(D+1)x \quad\rightarrow\quad y_p=\frac{-3}{7}te^t+\frac{2}{7}e^t-\frac{1}{25}(5t-18)$

نهایتا جواب عمومی دستگاه عبارت است از :

$$\boxed{\begin{cases}x_g=Ae^t+4Be^{-\frac{5}{2}t}+\frac{3}{7}te^t+\frac{2}{25}(5t+3)\\y_g=-Ae^t+3Be^{-\frac{5}{2}t}+\frac{-3}{7}te^t+\frac{2}{7}e^t-\frac{1}{25}(5t-18)\end{cases}}$$

پاسخ سوال ۴

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی :　　　　　نام :　　　　　شماره دانشجویی :　　　　　نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۵

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را حل کنید :

$$y''+۴y=\begin{cases} ۱ & t<۲\pi \\ t & ۲\pi\le t \end{cases} \quad ; \quad y(۰)=\frac{۱}{۴}\,,\,y'(۰)=۴$$

جواب :

$$y''+۴y=۱+H(t-۲\pi)(t-۱)$$

$$L\{y''+۴y\}=L\{۱+H(t-۲\pi)(t-۱)\}$$

$$(s^۲+۴)L\{y\}-\frac{۱}{۴}s-۴=\frac{۱}{s}+e^{-۲\pi s}(\frac{۱}{s^۲}-\frac{۱}{s})$$

$$L\{y\}=\frac{۱}{۴}\times\frac{s}{s^۲+۴}+\frac{۴}{s^۲+۴}e^{-۲\pi s}(\frac{۱-s}{s^۲(s^۲+۴)})$$

$$L\{y\}=\frac{۱}{۴}\times\frac{s}{s^۲+۴}+\frac{۴}{s^۲+۴}+\frac{۱}{s(s^۲+۴)}+e^{-۲\pi s}(\frac{۱-s}{s^۲(s^۲+۴)})$$

$$L\{y\}=\frac{۱}{۴}\times\frac{s}{s^۲+۴}+\frac{۴}{s^۲+۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{s}-\frac{۱}{۴}\frac{s}{(s^۲+۴)}+\frac{۱}{۴}e^{-۲\pi s}(\frac{۱}{s^۲}-\frac{۱}{s}+\frac{s-۱}{s^۲+۴})$$

$$L\{y\}=L\{۲\sin ۲t+\frac{۱}{۴}\}+\frac{۱}{۴}e^{-۲\pi s}L\{t-۱+\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t\}$$

$$y=۲\sin ۲t+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}H(t-۲\pi)(t-۲\pi-۱+\cos ۲(t-۲\pi)-\frac{۱}{۲}\sin ۲(t-۲\pi))$$

یعنی

$$\boxed{y=۲\sin ۲t+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}H(t-۲\pi)(t-۲\pi-۱+\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t)}$$

و یا

$$\boxed{y=\begin{cases} ۲\sin ۲t+\frac{۱}{۴} & t<۲\pi \\ \frac{۱۵}{۸}\sin ۲t+\frac{۱}{۴}\cos ۲t+\frac{۱}{۴}(t-۲\pi) & ۲\pi\le t \end{cases}}$$

پاسخ سوال ۵

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.

نام خانوادگی : نام : شماره دانشجویی : نام درس :

شماره ردیف

نمره
۲۰

پاسخ سوال ۶

الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\sinh ۲t}{t}$ را بیابید.

جواب :
$$L\{\sinh ۲t\}=L\{\frac{e^{۲t}-e^{-۲t}}{۲}\}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{s-۲}-\frac{۱}{s+۲})=\frac{۲}{s^۲-۴}$$
$$\rightarrow\quad L\{\frac{\sinh ۲t}{t}\}=\int_s^\infty \frac{۲}{s^۲-۴}ds=\frac{۱}{۲}\int_s^\infty(\frac{۱}{s-۲}-\frac{۱}{s+۲})ds$$

بنابر این
$$\boxed{L\{\frac{\sinh ۲t}{t}\}=\frac{۱}{۲}\ln\frac{s-۲}{s+۲}}$$

ب) تبدیل معکوس تابع $F(s)=\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}$ را بیابید.

جواب : روش اول :

$$\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=\frac{۸}{(s^۲+۱)^۲}+\frac{۷s}{(s^۲+۱)^۲}=۸\times\frac{۱}{(s^۲+۱)}\times\frac{۱}{(s^۲+۱)}-\frac{۷}{۲}\times\frac{-۲s}{(s^۲+۱)^۲}$$
$$=۸L\{\sin t\}L\{\sin t\}-\frac{۷}{۲}L'\{\sin t\}=L\{۸\int_۰^t\sin\tau\sin(t-\tau)d\tau+\frac{۷}{۲}t\sin t\}$$
$$=L\{۴\int_۰^t(\cos(t-۲\tau)-\cos t)d\tau+\frac{۷}{۲}t\sin t\}$$
$$=L\{[-۲\sin(t-۲\tau)-۴\tau\cos t]_۰^t+\frac{۷}{۲}t\sin t\}$$

بنابر این
$$\boxed{\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=L\{۴\sin t-۴t\cos t+\frac{۷}{۲}t\sin t\}}$$

روش دوم :

اگر $\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=\frac{as+b}{s^۲+۱}+(\frac{cs+d}{s^۲+۱})'$ آنگاه $\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=\frac{as^۳+(b-c)s^۲+(a-۲d)s+(a+c)}{(s^۲+۱)^۲}$

و در نتیجه $a=۰$ ، $b=c=۴$ و $d=-\frac{۷}{۲}$

یعنی

$$\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=\frac{۴}{s^۲+۱}+(\frac{۴s+\frac{۷}{۲}}{s^۲+۱})'=L\{۴\sin t\}+L'\{۴\cos t-\frac{۷}{۲}\sin t\}$$
$$=L\{۴\sin t\}-L\{t(۴\cos t-\frac{۷}{۲}\sin t)\}$$
$$=L\{۴\sin t-t(۴\cos t-\frac{۷}{۲}\sin t)\}$$

بنابر این
$$\boxed{\frac{۸+۷s}{(s^۲+۱)^۲}=L\{۴\sin t-۴t\cos t+\frac{۷}{۲}t\sin t\}}$$

پاسخ سوال ۶

در صورت لزوم ، ادامه پاسخ را در پشت همین برگه بنویسید.