

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



WWW.EGZA.TK

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

تعداد سوال: هفتی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۳۱۲۷۲ تاریخ: ۸۶/۳/۱۳ شروع: ۸:

تعداد کل صفحات: ۴

WWW.EGZA.TK

* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۱. کدامیک از دستگامهای معادله دیفرانسیل زیر خودگردان می باشد؟

$$\begin{cases} x_1'(t) = 1 \\ x_2'(t) = x_1 + 1 \end{cases} \quad \text{ب.} \quad \begin{cases} x_1'(t) = 1 \\ x_2'(t) = (t) \end{cases} \quad \text{الف.}$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = tx_2 \\ x_2'(t) = tx \end{cases} \quad \text{د.} \quad \begin{cases} x_1'(t) = t \\ x_2'(t) = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{ج.}$$

۲. اگر معادله دیفرانسیل $x' = Ax$ به صورت $x' = Ax$ بنویسیم A کدام ماتریس است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{15}{4} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ب.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\frac{15}{4} \end{bmatrix} \quad \text{الف.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{15}{4} \end{bmatrix} \quad \text{د.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{15}{4} & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ج.}$$

۳. کدام شرط برای اینکه معادله دیفرانسیل $u' = g(t, u)$ با شرط اولیه $u(t_0) = u_0$ روی ناحیه D دارای یک جواب یگانه باشد یک شرط کافی است؟الف. تابع g در شرط لیبشیتز صدق کند.ب. تابع g روی D پیوسته و کراندار باشد.ج. ناحیه D کراندار باشد و g پیوسته باشد.د. تابع g روی D پیوسته کراندار باشد و در شرط لیبشیتز صدق کند.۴. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه معادله ماتریسی

$$A^T B + BA = -C$$

به ازای هر ماتریس معین مثبت C ، یک جواب معین مثبت B داشته باشد. کدام است؟الف. A معین مثبت باشد.ب. A مجانباً پایدار باشد.د. A پایدار باشد.ج. A معین منفی باشد.۵. کدام یک از توابع زیر جواب نامعادله $u' > u^2$ روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ می باشد؟

$$u(t) = t \cot t \quad \text{ب.}$$

$$u(t) = \cot t \quad \text{الف.}$$

$$u(t) = \cos t \quad \text{د.}$$

$$u(t) = \sin t \quad \text{ج.}$$



۶. اگر $u(t)$ ، $(0 < t < 1)$ یک جواب مسأله با مقدار اولیه $u(0) = 1$ ، $u' = u^2 - t$ باشد کدام گزینه زیر درست است؟

الف. $u(t) > t + 1$ ب. $\frac{1}{t-1} < u(t) < t + 1$

ج. $1 + t < u(t) < \frac{1}{1-t}$ د. $u(t) < \frac{1}{t-1}$

۷. اگر تابع u روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته و نامنفی باشد و درنابرابری $u(t) \leq \frac{1}{\nu} + \nu \int_{\alpha}^t u(s) ds$ صدق کند کدام گزینه صحیح است؟

الف. $u(t) \leq \frac{1}{\nu} \exp \nu(t - \alpha)$ ب. $u(t) \leq \exp(t - \nu)$

ج. $u(t) \leq \nu \exp t$ د. $u(t) \leq \frac{1}{\nu} \exp \nu t$

۸. فرض کنید $t_0 \in (r_1, r_2)$ و $\varphi(t)$ جوابی از دستگاه خطی مرتبه اول $x' = A(t)x$ باشد بطوریکه $\varphi(t_0) = 0$ در

مورد تابع $\varphi(t)$ کدام گزینه درست است؟

الف. $\varphi(t)$ روی بازه $[r_1, r_2]$ متحد صفر است.

ب. $\varphi(t)$ روی R متحد با صفر است.

ج. $\varphi(t)$ روی R همواره مخالف صفر است.

د. فقط تابع φ در نقطه t_0 برابر صفر است.

۹. اگر φ یک ماتریس اصلی $x' = A(t)x$ و C یک ماتریس ثابت باشد کدام گزینه صحیح است؟

الف. φC نیز یک ماتریس اصلی معادله است. ب. اگر C نامنفرد باشد φC نیز یک ماتریس اصلی است.

ج. اگر C منفرد باشد φC یک ماتریس اصلی است. د. بازای هر ماتریس C ، φC یک جواب است.

۱۰. اگر φ یک ماتریس جواب دستگاه $x' = A(t)x$ و ψ یک ماتریس جواب دستگاه الحاقی $x' = -A^T(t)x$ باشد در

این صورت کدام گزینه صحیح است؟

الف. ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که: $\varphi C = I$

ب. همواره $\psi^T \varphi = I$

ج. ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که $\psi^T \varphi = C$

د. ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که $\psi \varphi = C$



WWW.EGZA.TK

۱۱. شرایط هوروتیز را در مورد چند جمله‌ای $\lambda^p + a_1\lambda + a_p$ به چه صورت می‌توان تحویل نمود؟الف. $a_1^2 - 4a_p > 0$. ب. $a_p > 0, a_1 > 0$. ج. $a_1a_p > 0$. د. $a_p < 0, a_1 > 0$.۱۲. ماتریس A را در چه صورت پایدار می‌گوئیم؟

الف. قسمت حقیقی تمام ویژه - مقادیر آن منفی باشد. ب. قسمت حقیقی تمام ویژه - مقادیر آن مثبت باشد.

ج. قسمت موهومی تمام ویژه - مقادیر آن صفر باشد. د. قسمت حقیقی تمام ویژه - مقادیر آن صفر باشد.

۱۳. اگر تمام جوابهای دستگاه $x' = Ax$ روی $(0, +\infty)$ کراندار باشند در چه صورت تمام جوابهای دستگاه $x' = (A + B(t))x$ ($B(t)$ ماتریس $n \times n$ و پیوسته و A ماتریس $n \times n$ ثابت می‌شود) روی $(0, +\infty)$ کراندار

می‌باشد.

الف. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$. ب. $\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$. ج. A ماتریس منفرد باشد. د. $B(t)$ ماتریس ثابت نامنفرد باشد.۱۴. در مورد جوابهای معادله $u' = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. قوی - پایدار است. ب. مجانباً پایدار است. ج. قوی پایدار نمی‌باشد. د. مجانباً پایدار و کراندار می‌باشد.

۱۵. اگر قسمت حقیقی هر یک از ویژه - مقادیر ماتریس A منفی باشد در مورد جوابهای معادله $x' = Ax$ کدام

گزینه صحیح است؟

الف. قوی - پایدار هستند. ب. کراندار می‌باشند. ج. مجانباً پایدار هستند. د. هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

۱۶. با چه شرطی جوابهای ناپدیدی $u'' + \varphi(t)u = 0$ نوسانی می‌باشد.الف. بازای هر t که $\varphi(t) \geq 0$. ب. بازای هر t که $\varphi(t) \leq 0$.ج. بازای هر t که $\varphi(t)$ پیوسته باشد. د. به ازای هر t که $\varphi(t) \geq m^2 > 0$ (m عدد حقیقی است).۱۷. در چه صورت تمام جوابهای $u'' + (1 + b(t))u = 0$ روی $(0, +\infty)$ کراندار می‌باشد.الف. $|b(t)| < \infty$. ب. $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$. ج. $\int_0^{\infty} |b(t)| dt < \infty$. د. $b(t)$ تابع پیوسته است.۱۸. در مورد معادله $u'' + \frac{1}{4t^2}u = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. یک معادله نوسانی است. ب. یک معادله غیرنوسانی است.

ج. تمام جوابهای آن کراندار است. د. تمام جوابهای آن بیکران است.



۱۹. اگر $u = \varphi(t)$ جوابی از معادله $u' + p(t)u + q(t)u^r = r(t)$ باشد جواب دیگر معادله به چه صورت است؟

الف. $u = c\varphi(t)$ ب. $u = \varphi(t) + \frac{1}{t}$ ج. $u = \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)}$ د. $u = t\varphi(t)$

۲۰. شرط کافی برای آنکه یک جواب ماتریس $\varphi(t)$ از $x' = \varphi(t)x$ یک ماتریس اصلی باشد آنست که:

الف. $w(t) \neq 0$ ب. $w(t) = 0$

WWW.EGZA.TK

د. سطرها φ وابسته خطی باشد.

ج. $\varphi(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t)$

سوالات تشریحی:

۱. فرض کنید که توابع u, v روی بازه $[t_0, t_0 + a]$ پیوسته و نامنفی باشند و همچنین فرض کنید $f(t)$ روی این بازه

مثبت، پیوسته و نانزولی باشد و در نامساوی $u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$ صدق کند ثابت کنید که:

$$u(t) \leq f(t) \exp \left[\int_{t_0}^t v(s) ds \right]$$

۲. معادله دیفرانسیل $x''' - 3x' + 2x = 9e^t$ ، $t > 0$ ، مفروض است.

الف. این معادله را بصورت برداری بنویسید.

ب. ماتریس اصلی برای دستگاه معادله همگن برداری را بدست آورید.

ج. جواب دستگاه معادله غیرهمگن را بنویسید. (بدون حل آن فقط رابطه را بنویسید.)

۳. نشان دهید که نقطه $(0, 0)$ از دستگاه $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$ نقطه ناپایدار این دستگاه می باشد.

۴. نشان دهید تمام جوابهای معادله دیفرانسیل $u'' + (1 + \frac{2}{t(t^p+1)})u = 0$ ، $t > 0$ ، کراندارند.

۵. فرض کنید $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ ثابت کنید که جوابهای معادله $u'' + (1 + \varphi(t))u = 0$ نوسانی هستند.

