

انجمن علمی آمار و احتمال

بنام او که به شماره موجودات آگاه است
امتحان میانترم احتمال (۲)

تذکر: جواب سوالات را به طور خوانا بنویسید و زیر جواب هر سوال خط بکشید.

۱- فرض کنید X دارای تابع چگالی زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases}$$

مطلوب است تابع چگالی $.Y = X^2$

۲- فرض کنید (X, Y) دارای تابع چگالی توام زیر باشد

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c(x-y), & x = 1, 2, 3, 4, \quad y = 0, 1, \dots, x \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases}$$

الف- c را طوری بباید که f تابع چگالی توام باشد.

ب- تابع چگالی حاشهای X و Y را بباید.

۳- فرض کنید $(X, Y) \sim N(0, \sigma^2)$ مطلوب است $P(X + Y \leq 1)$

۴- فرض کنید X و Y نمونه تصادفی از $(1, 1) - U$ باشند. مطلوب است $E[\max(X, Y)]$

- نشان دهید که برای $\mathbb{E}[X] < \infty$ داریم $\text{Cov}(X, \frac{1}{X}) < 0$

۶- فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ مطلوب است $E(a^X) > 0$ برای هر $a > 0$

-۷

الف - فرض کنید که $B = \{X \leq a\}$ مطلوب است $F_X(x|B)$

ب - اگر $B = \{b < X \leq a\}$ مطلوب است $F(x|B)$

ج - نشان دهید که برای یک پیشامد دلخواه A داریم $P(A|X \leq x) = \frac{F_X(x|A)}{F_X(x)}$

د - نشان دهید که $P(A|x_1 < X \leq x_2) = \frac{F_X(x_2|A) - F_X(x_1|A)}{F_X(x_2) - F_X(x_1)}$

۸- با فرض اینکه $P(A|X = x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(A|x < X \leq x + \Delta x)$

نشان دهید که $P(A|X = x) = \frac{f_X(x|A)}{f_X(x)} P(A)$ حال ثابت کنید که $f(x|A) = \frac{P(A|X=x)}{P(A)} f_X(x)$

و - از قسمت قبل استفاده کنید و اگر $X \sim N(0, 1)$ مطلوب است $E(X|X > 0)$ و $\mathbb{E}(X|X > 0)$

- ۹- فرض کنید $(X, Y) \sim U(0, 1)^2$ و $X \sim U(0, 1)$ مطلوب است $E(Y|X < 1)$

موفق باشید

فضل الله لك