

بسمه تعالی

امتحان پایانترم آمار ریاضی دو

(۱) بر اساس تک مشاهده X از چگالی $f(x; \theta) = \theta(2x - 1) + 1$ با $0 \leq x \leq 1$ و $\theta > 0$ در مقابل $H_0 : \theta \leq 1$ آزمون UMP با اندازه α برای آزمون فرض $\theta \leq 1$ بود. (ناحیه بحرانی را بر حسب α مشخص کنید)

(۲) فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برای آزمون $H_0 : \theta = 0$ در مقابل $H_1 : \theta \neq 0$ مشاهده $x = 1$ بود. اگر آزمون نسبت درستنمایی تعیین یافته بکار رفته باشد، مقدار احتمال (p -value) را بدست آورید.

x	1	2	3	4
$f_\theta(x)$	$\frac{1-\theta}{1}$	$\frac{1+\theta}{1}$	$\frac{2-\theta}{1}$	$\frac{2+\theta}{1}$

$$-1 < \theta < 1$$

(۳) فرض کنید $X \sim U(0, \theta)$ باشد. برای آزمون $H_0 : \theta \leq 1$ در مقابل $H_1 : \theta > 1$ فرض H_0 رد می شود اگر $\frac{1}{9} < X < 1$ باشد. تابع توان آزمون را بدست آورده رسم کنید. سپس احتمال خطای نوع اول و دوم را نیز حساب کنید.

(۴) ثابت کنید که توزیع $(\theta, 0) N$ برای $U = \sum_{i=1}^n X_i^2$ دارای خاصیت MLR می باشد. (با استفاده از تعریف)

(۵) نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n از چگالی

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

می باشد. یک ناحیه بحرانی UMP با میزان α برای $H_0 : \theta \leq 1$ در مقابل $H_1 : \theta > 1$ پیدا کنید.

(۶) در توزیع $B(1, p)$ بر اساس یک نمونه سه تایی برای آزمون فرض $H_0 : p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1 : p = \frac{1}{2}$ پرتوانترین آزمونها در سطوح $\alpha = 0.125$ و $\alpha = 0.05$ را بدست آورید.

(۷) فرض کنید X یک تک مشاهده از چگالی $f_\theta(x) = x\theta^2 e^{-\theta x}$, $x > 0$ است. یک فاصله اطمینان با ضریب اطمینان $(1 - \alpha)^{100}$ برای θ پیدا کنید.

(۸) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد یک فاصله اطمینان با ضریب اطمینان $(1 - \alpha)^{100}$ برای پارامتر θ بدست آورید.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, 0 < x < 1, \theta > 0$$

(۹) فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. نشان دهید

(۱۰) یک فاصله اطمینان برای θ است و امید طول آن را محاسبه کنید.